Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung)

Wichtige Stammfunktionen

$\int ax^n + bx^m \, dx = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + b \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (\text{mit } n, m \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$\int x^{-1} \, dx = \ln x + C \qquad \int \sin x + \cos x \, dx = -\cos x + \sin x + C$

$\int a \cdot e^x \, dx = a \cdot e^x + C \quad ; \qquad \int a \cdot e^{bx} \, dx = \frac{a}{b} \cdot e^{bx} + C \quad (\text{mit } b \neq 0)$

$\int \ln x \, dx = -x + x \cdot \ln x + C$ und $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$

Aufgaben

1. Berechnen Sie und veranschaulichen Sie durch eine Skizze.

   a) $\int_{-1}^{3} (x-2)^2 dx$ b) $\int_{-1}^{3} (x-1)^2 - 1 \, dx$ c) $\int_{0}^{4} \sqrt{2x+1} \, dx$

2. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den der Graph insgesamt mit x-Achse einschließt. Veranschaulichen Sie zuerst mit einer Skizze.

   a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ b) $f(x) = x^4 - 4x^2$

3. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, den die beiden Graphen insgesamt einschließen. Veranschaulichen Sie zuerst mit einer Skizze.

   a) $f(x) = x^2 - 3$ und $g(x) = x - 1$

   b) $f(x) = x^3 + 1$ und $g(x) = 3x - 1$

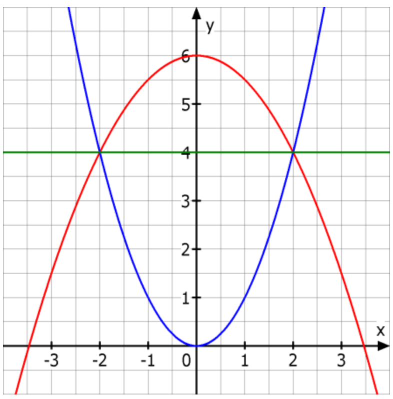
4. Der Graph von f, die Gerade $x = 1$ und die positive x-Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Prüfen Sie durch geeignete Rechnung, ob der Flächeninhalt dieser Fläche endlich ist! (Skizze)

   a) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

5. Bestimmen Sie zu $f(x) = (2x+4) \cdot e^{2x+1}$ eine Stammfunktion mit Hilfe des Probeansatzes $F(x) = (ax+b) \cdot e^{2x+1}$.

6. Zeigen Sie dass $g(x) = \frac{x-2}{2x+1}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{5}{(2x+1)^2}$ ist.

   Berechnen Sie dann $\int_0^2 \frac{5}{(2x+1)^2} dx$.



7. a) Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, den die beiden Graphen von $f(x) = 6 - 0{,}5x^2$ und $g(x) = x^2$ miteinander einschließen.

   b) In welchem Verhältnis teilt die Gerade $y = 4$ diese Fläche mit dem Inhalt A?

   c) Bestimmen Sie eine reelle Zahl a so, dass die Gerade $y = a$ diese Fläche genau halbiert.

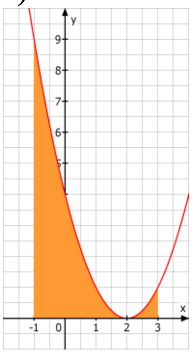
Q12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung (Wiederholung) * Lösungen

1. a) $\int\limits_{-1}^{3}(x-2)^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(x-2)^3\right]_{-1}^{3} = \frac{1}{3} - (-9) = 9\frac{1}{3}$

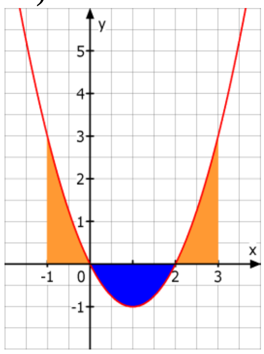
   b) $\int\limits_{-1}^{3}(x-1)^2 - 1\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - x\right]_{-1}^{3} = \frac{8}{3} - 3 - \left(-\frac{8}{3}+1\right) = \frac{4}{3}$

   c) $\int\limits_{0}^{4}\sqrt{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^{3/2}\right]_{0}^{4} = \frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$

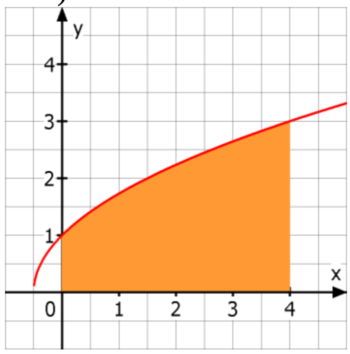
a)



b)



c)

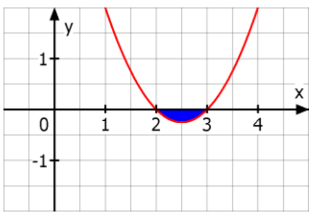


2. a) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 5x + 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-3)\cdot(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 2\,,\; x_2 = 3$

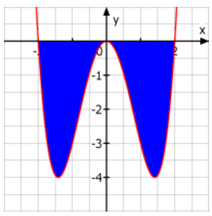
   $A = \left|\int\limits_{2}^{3} x^2 - 5x + 6\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{5}{2}\cdot x^2 + 6x\right]_{2}^{3}\right| = \left|(9 - \frac{45}{2} + 18) - (\frac{8}{3} - 10 + 12)\right| = \frac{1}{6}$

   b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow x_{1/2} = 0\,;\; x_3 = -2\,;\; x_4 = 2$

   $A = \left|2\cdot\int\limits_{0}^{2} x^4 - 4x^2\,dx\right| = \left|2\cdot\left[\frac{1}{5}\cdot x^5 - \frac{4}{3}\cdot x^3\right]_{0}^{2}\right| = \left|2\cdot(\frac{32}{5} - \frac{32}{3})\right| = \left|-\frac{128}{15}\right| = 8\frac{8}{15}$



a)



b)

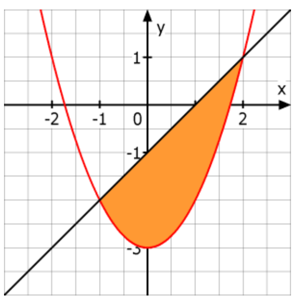
3. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1\,;\; x_2 = 2$

   $A = \int\limits_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{9}{2}$

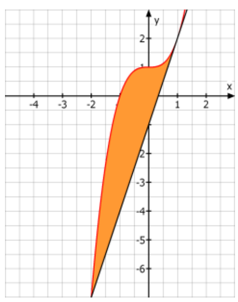
   b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 1 = 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x^2 + x - 2) = 0 \;\Leftrightarrow$

   $(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = 1\,;\; x_3 = -2$

   $A = \int\limits_{-2}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int\limits_{-2}^{1} x^3 - 3x + 1\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + x\right]_{-2}^{1} = -\frac{1}{4} - (-4) = 3\frac{3}{4}$



a)

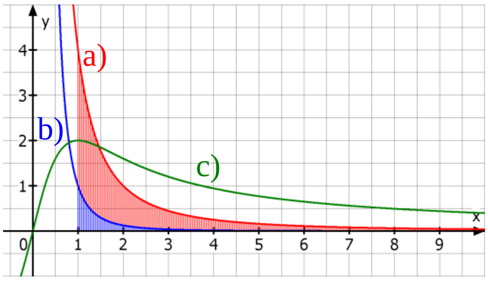


b)

4. a) $A_1 = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{4}{x^2}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{4}{x} \right]_1^a = \lim\limits_{a\to\infty} (-\frac{4}{a} + 4) = 4$

b) $A_2 = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^3}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^a = \lim\limits_{a\to\infty} (-\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a \frac{4x}{x^2+1}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \left[\ln(\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)) \right]_1^a = \lim\limits_{a\to\infty} (\ln\frac{a^2+1}{2} - \ln 1) = \infty$



5. $F(x) = (ax+b)\cdot e^{2x+1} \Rightarrow F'(x) = a\cdot e^{2x+1} + (ax+b)\cdot e^{2x+1}\cdot 2 = (2ax+2b+a)\cdot e^{2x+1}$

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (2ax+2b+a)\cdot e^{2x+1} = (2x+4)\cdot e^{2x+1} \Leftrightarrow 2a = 2$ und $2b+a=4$

also $a=1$ und $b=1{,}5$, d.h. $F(x) = (x+1{,}5)\cdot e^{2x+1}$

6. $g(x) = \frac{x-2}{2x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-2x+4}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} = f(x)$

also ist g eine Stammfunktion von f.

$\int_0^2 \frac{5}{(2x+1)^2}\,dx = \left[\frac{x-2}{2x+1} \right]_0^2 = 0 - \frac{-2}{1} = 2$

7. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 6-0{,}5x^2 = x^2 \Leftrightarrow 6 = 1{,}5x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$

$A = \int_{-2}^2 f(x)-g(x)\,dx = \int_{-2}^2 6-1{,}5x^2\,dx = 2\cdot\int_0^2 6-1{,}5x^2\,dx = 2\cdot\left[6x - \frac{1{,}5}{3}\cdot x^3 \right]_0^2 =$

$2\cdot(12-4) = 16$

b) $A_2 = 16 - A_1 = \frac{32}{3}$ und $A_1 : A_2 = 16 : 32 = 1 : 2$

c) Nach a) gilt für $y = a$ also $0 < a < 4$ und $g(x) = a \Leftrightarrow x^2 = a \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{a}$

$\frac{A}{2} = 8 \overset{!}{=} 2\cdot\int_0^{\sqrt{a}} a-g(x)\,dx = 2\cdot\int_0^{\sqrt{a}} a-x^2\,dx = 2\cdot\left[ax - \frac{1}{3}\cdot x^3 \right]_0^{\sqrt{a}} = 2\cdot(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}) = \frac{4}{3}a\sqrt{a} \Rightarrow$

$8 = \frac{4}{3}a\sqrt{a} \Leftrightarrow a\sqrt{a} = 6 \Leftrightarrow a = 6^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{36} \approx 3{,}30$