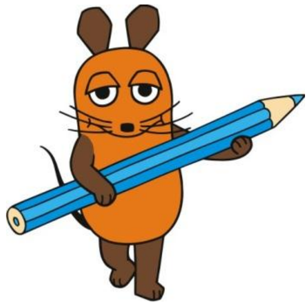
Q 12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung

1. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale.



a) $\int_0^4 x^2+2x\,dx$ b) $\int_1^2 5-\frac{2}{x^2}\,dx$

c) $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$ d) $\int_1^2 (x^2+1)\cdot\sqrt{x}\,dx$

2. Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und g miteinander einschließen.

a) $f(x) = x^2-1$ und $g(x) = x+1$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3-3x$ und $g(x) = -\frac{5}{3}\cdot x$

c) $f(x) = x\cdot(x-3)^2$ und $g(x) = x$

3. Bestimmen Sie den Wert von k so, dass die Gleichung erfüllt ist.
Deuten Sie das Ergebnis jeweils geometrisch!

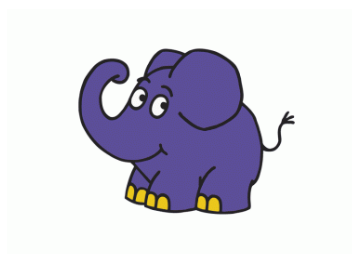
a) $\int_{-k}^{k} 1-x^2\,dx = 0$ b) $\int_{-k}^{k} x^3-x\,dx = 0$

4. Zum Tüfteln
Berechnen Sie das bestimmte Integral. Denken Sie dabei an den HDI.

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,dx$ b) $\int_0^3 6x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx$

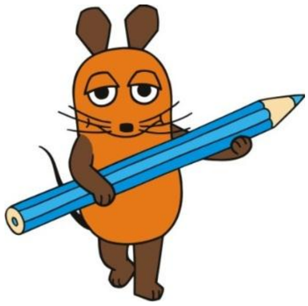
c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi)\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

e) $\int_0^1 2x\cdot e^{x^2-1}\,dx$ f) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}}\,dx$



g) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ h) $\int_1^2 \frac{5x}{x^2+1}\,dx$

Q 12 * Mathematik * Aufgaben zur Integralrechnung * Lösungen



1. a) $\int_0^4 x^2+2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^4 = \frac{64}{3}+16-0 = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$

b) $\int_1^2 5-\frac{2}{x^2}\,dx = \left[5x+\frac{2}{x}\right]_1^2 = (10+\frac{2}{2})-(5+2) = 4$

c) $\int_0^3 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{27}-0 = 2\cdot\sqrt{3}$

d) $\int_1^2 (x^2+1)\cdot\sqrt{x}\,dx = \int_1^2 x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{7}\cdot x^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 =$

$(\frac{16\sqrt{2}}{7}+\frac{4\sqrt{2}}{3})-(\frac{2}{7}+\frac{2}{3}) = \frac{76\sqrt{2}-20}{21}$

2. a) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-1/0)$ und $S_2(2/3)$

$A = \int_{-1}^2 g(x)-f(x)\,dx = \frac{10}{3}-(-\frac{7}{6}) = 4{,}5$

b) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(-2/\frac{10}{3})$, $S_2(0/0)$ und $S_3(2/-\frac{10}{3})$

Wegen der Punktsymmetrie beider Graphen bezüglich des Ursprungs gilt:

$A = 2\cdot\int_0^2 g(x)-f(x)\,dx = 2\cdot\left[\frac{2x^2}{3}-\frac{x^4}{12}\right]_0^2 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

c) Schnittpunkte der beiden Graphen: $S_1(0/0)$, $S_2(2/2)$ und $S_3(4/4)$

$A = \int_0^2 f(x)-g(x)\,dx + \int_2^4 g(x)-f(x)\,dx = \int_0^2 x^3-6x^2+8x\,dx + \int_2^4 -x^3+6x^2-8x\,dx =$

$\int_0^2 x^3-6x^2+8x\,dx + \int_2^4 -x^3+6x^2-8x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2\right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4}+2x^3-4x^2\right]_2^4 =$

$(4-0)+(0-(-4)) = 8$

3. a) $\int_{-k}^k 1-x^2\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-k}^k = \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3}$ d.h.

$\int_{-k}^k 1-x^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \frac{2k\cdot(3-k^2)}{3} = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0$ oder $k_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

b) $\int_{-k}^k x^3-x\,dx = 0$ gilt für jedes $k \in R$, denn der Graph von $f(x) = x^3-x$ ist punktsymmetrisch. Die Rechnung zeigt dies ebenfalls:

$\int_{-k}^k x^3-x\,dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-k}^k = \frac{k^4}{4}-\frac{k^2}{2}-\left(\frac{(-k)^4}{4}-\frac{(-k)^2}{2}\right) = 0$ gilt für jedes k.

4. Alle Stammfunktionen findet man durch Probieren!

a) $\int_0^3 \sqrt{2x+3}\,dx = \left[\frac{1}{3}\cdot(2x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 9-\sqrt{3}$

b) $\int_0^3 6x\cdot\sqrt{x^2+3}\,dx = \left[2\cdot\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = 2\cdot 12\cdot\sqrt{12} - 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} = 42\cdot\sqrt{3}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x-\pi)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x-\pi)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}\cdot(-1)) = -\frac{3}{4}$

d) $\int_0^1 \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx = \left[\frac{3}{2}\cdot(4x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{3}{2}$

e) $\int_0^1 2x\cdot e^{x^2-1}\,dx = \left[e^{x^2-1}\right]_0^1 = e^{1-1} - e^{0-1} = 1-\frac{1}{e}$

f) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\cdot\sqrt{x}}\,dx = \left[e^{\sqrt{x}}\right]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$

g) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \left[\ln\left(\left|x^2+1\right|\right)\right]_0^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$

h) $\int_1^2 \frac{5x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{5}{2}\cdot\ln\left(\left|x^2+1\right|\right)\right]_1^2 = \frac{5}{2}\cdot(\ln 5 - \ln 2) = \frac{5}{2}\cdot\ln\frac{5}{2}$