

## Q12 \* Mathematik m6 \* Klausur am 17.02.2014

1. Beim Wurf zweier Würfel wird die Zufallsgröße  $X =$  „Produkt der Augenzahlen“ festgelegt. Bestimmen Sie  $P(X \leq 4)$ .
  
2. In einer Mensa werden täglich für 200 Betriebsangehörige Mittagessen zubereitet. Freitags können die 200 Gäste zwischen einer Mehlspeise und einem Fischgericht wählen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich etwa 45% für die Mehlspeise und 55% für das Fischgericht. Der Chefkoch lässt daher 100 Mehlspeisen und 125 Fischgerichte zubereiten.
  - a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Anzahl der Mehlspeisen?
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht die Anzahl der Fischgerichte nicht?
  
3. Anton und Berta vereinbaren folgendes Spiel. Anton wirft 6 Münzen. Wenn die Anzahl der Münzen mit „Wappen“ größer als die mit „Kopf“ ist, dann erhält er von Berta 1,50 €. Andernfalls muss Anton an Berta 1,00 € zahlen.
  - a) Lohnt es sich für Anton, dieses Spiel mit Berta sehr oft zu wiederholen? Begründen Sie Ihre Antwort mit geeigneter Rechnung.
  - b) Wie oft muss Anton das Spiel mindestens wiederholen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal den Geldbetrag von 1,50 € erhält?
  
4. Im Rinderbestand eines Landes sind durchschnittlich 2% der Tiere mit dem Erreger einer Krankheit  $K$  infiziert. Nachdem diese Krankheit aber verstärkt aufzutreten scheint, vermuten Tierärzte, dass die Infizierungsrate auf über 4% angestiegen ist. In einer Studie soll diese Vermutung an 200 Rindern getestet werden.
  - a) Entwerfen Sie einen Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau von 5% und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
  - b) Bei diesem Test erweisen sich 13 Rinder als infiziert. Sehen die Tierärzte ihre Vermutung durch den Test bestätigt?
  
5. Im  $\mathbb{R}^3$  legen die Punkte  $P(2/-4/7)$ ,  $Q(3/-2/7)$  und  $R(6/1/4)$  die Ebene  $E$  und die Punkte  $A(1/2/3)$  und  $B(-2/5/4)$  die Gerade  $g = AB$  fest.
  - a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene  $E$ .  
[mögliches Ergebnis  $E: 2x_1 - x_2 + x_3 - 15 = 0$  ]
  - b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts  $S$  der Geraden  $g$  mit der Ebene  $E$ .
  - c) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes  $A$  von der Ebene  $E$ .

Aufgabe	1	2a	b	3a	b	4a	b	5a	b	c	Summe
Punkte	3	2	2	4	4	5	1	4	3	4	32



Gutes Gelingen! G.R.

## Q12 \* Mathematik m6 \* Klausur am 17.02.2014 \* Lösung

1.  $P(X \leq 4) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ , denn 4 ist größer als 1·1; 1·2; 2·1; 1·3; 3·1; 1·4; 4·1 und 2·2.

2. a)  $P(\text{"100 Mehlspeisen reichen"}) = P_{0,45}^{200}(X \leq 100) = 0,93192 \approx 93,2\%$

b)  $P(\text{"125 Fischgerichte reichen nicht"}) = P_{0,55}^{200}(X > 125) = 1 - P_{0,55}^{200}(X \leq 125) = 1 - 0,98666 \approx 1,3\%$

3. a)  $p_1 = P(\text{"Mehr Wappen als Kopf"}) = P_{0,5}^6(X > 3) = 1 - P_{0,5}^6(X \leq 3) = 1 - 0,65625 = 0,34375 (= P_{0,5}^6(X \leq 2))$

Antons Gewinnerwartung pro Spiel beträgt

$$-1,00\text{€} \cdot 0,65625 + 1,50\text{€} \cdot 0,34375 = -0,140625\text{€} \approx -0,14\text{€}$$

Es lohnt sich für Anton also nicht, das Spiel öfter zu spielen, weil er dann mit sehr großer Wahrscheinlichkeit insgesamt verliert.

b)  $P(\text{"Anton gewinnt mindestens einmal"}) \geq 99\% \Leftrightarrow 1 - P(\text{"Anton gewinnt nie"}) \geq 99\% \Leftrightarrow 1 - 0,65625^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,65625^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \log 0,65625^n \leq \log 0,01 \Leftrightarrow n \cdot \log 0,65625 \leq \log 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\log 0,01}{\log 0,65625} = 10,9\dots$  also  $n \geq 11$

Anton muss also mindestens 11 mal das Spiel wiederholen.

4. a)  $H_0: p \leq 4\%$ ;  $A = \{0, 1, \dots, k\}$  und  $\bar{A} = \{k+1, \dots, 200\}$

$$P_{p \leq 4\%}^{200}(x \in \bar{A}) \leq 5\% \text{ gilt falls } P_{p=4\%}^{200}(x \in \bar{A}) \leq 5\% \Leftrightarrow$$

$$P_{4\%}^{200}(X \geq k+1) \leq 5\% \Leftrightarrow 1 - P_{4\%}^{200}(X \leq k) \leq 0,05 \Leftrightarrow P_{4\%}^{200}(X \leq k) \geq 0,95 \Leftrightarrow k \geq 13$$

also  $\bar{A} = \{14, 15, \dots, 200\}$

b) Die Tierärzte können bei diesem Signifikanzniveau ihre Vermutung nicht bestätigt sehen, denn die Anzahl von 13 infizierten Rindern liegt nicht im Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

5. a)  $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ 0+3 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wähle als Normalenvektor von E nun  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; also  $E: (\overline{X} - \overline{R}) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$E: 2x_1 - x_2 + x_3 - (2 \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 0 \Leftrightarrow E: 2x_1 - x_2 + x_3 - 15 = 0$$

$$\text{b) } g = AB: \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{AB} \quad \text{also } g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap E: 2 \cdot (1-3r) - 1 \cdot (2+3r) + 1 \cdot (3+r) - 15 = 0 \Leftrightarrow -8r - 12 = 0 \Leftrightarrow r = -1,5$$

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1,5) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ -2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad \text{also } S(5,5 / -2,5 / 1,5)$$

c) Die Gerade durch A mit dem Normalenvektor von E schneidet E im Fußpunkt F. Der Abstand des Punktes A von der Ebene E entspricht genau der Länge von [AF].

$$h: \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } h \cap E: 2 \cdot (1+2t) - 1 \cdot (2-t) + 1 \cdot (3+t) - 15 = 0 \Leftrightarrow$$

$$6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \quad \text{und } F(5/0/5)$$

$$\text{Abstand } d(A; E) = \overline{AF} = \left| 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

