

## Q12 \* Mathematik \* Aufgaben zu Kurvenscharen

Bestimmen Sie bei den angegebenen Kurvenscharen jeweils alle Nullstellen, Hoch-, Tief-, Terrassen- und Wendepunkte in Abhängigkeit von  $k$ .

1.  $f_k(x) = x^3 + kx^2 \quad k \in \mathbb{R}$

Auf welcher Kurve liegen die Hoch-, Tief-, bzw. Wendepunkte der Schar?

2.  $f_k(x) = x^3 + kx^2 + x \quad k \in \mathbb{R}_o^+$

Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte der Schar?

3.  $f_k(x) = \frac{kx}{k+x^2} \quad k \in \mathbb{R}^+$

Auf welcher Kurve liegen die Hoch- bzw. Tiefpunkte der Schar?



### Lösungen

1. Nullstellen:  $x_{1/2} = 0$  ;  $x_3 = -k$  für  $k=0$  Terrassenpunkt TP(0/0)

für  $k > 0$  :  $TIP(0/0)$  ;  $HOP(-\frac{2k}{3} / \frac{4k^3}{27})$

Kurve der HOP:  $y = -\frac{1}{2}x^3$  mit  $x \in \mathbb{R}^-$

für  $k < 0$  :  $TIP(-\frac{2k}{3} / \frac{4k^3}{27})$  ;  $HOP(0/0)$

Kurve der TIP:  $y = -\frac{1}{2}x^3$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$

für alle  $k$  : Wendepunkt  $WP(-\frac{k}{3} / \frac{2k^3}{27})$

Kurve der WP:  $y = -2x^3$  mit  $x \in \mathbb{R}$



2. für  $0 \leq k < 2$  gibt es genau eine NSt.  $x_1 = 0$  ;

für  $k = 2$  gibt es zwei NSt.  $x_1 = 0$  ;  $x_2 = -1$

für  $k > 2$  gibt es drei NSt.  $x_1 = 0$  ;  $x_{2/3} = \frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - 4})$

für  $k > \sqrt{3}$  gibt es HOP( $\frac{1}{3}(-k - \sqrt{k^2 - 3} / \dots)$ ) und TIP( $\frac{1}{3}(-k + \sqrt{k^2 - 3} / \dots)$ )

für  $k = \sqrt{3}$  gibt es Terrassenpunkt TP( $-\frac{\sqrt{3}}{3} / -\frac{\sqrt{3}}{9}$ )

für alle  $k \in \mathbb{R}_o^+$  Wendepunkt  $WP(-\frac{k}{3} / \frac{2k^3}{27} - \frac{k}{3})$

Kurve der WP:  $y = -2x^3 + x$  mit  $x \in \mathbb{R}_o^-$

3. Nullstellen:  $x_1 = 0$

Hochpunkte:  $HOP(\sqrt{k} / \frac{\sqrt{k}}{2})$  ; Kurve der Hochpunkte:  $y = \frac{1}{2}x$  mit  $x \in \mathbb{R}^+$

Tiefpunkte:  $TIP(-\sqrt{k} / -\frac{\sqrt{k}}{2})$  ; Kurve der Hochpunkte:  $y = \frac{1}{2}x$  mit  $x \in \mathbb{R}^-$