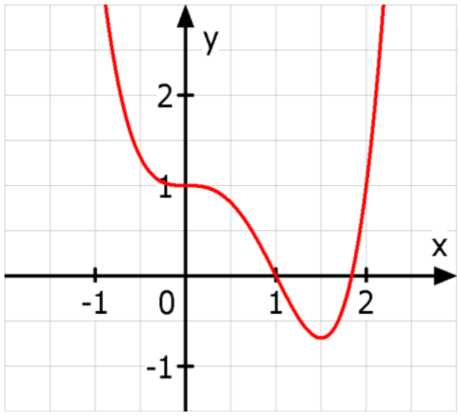
Q12 * Mathematik m1 * Wendepunkte und Art der Extrema

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktionen

   $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

   a) In welchen Intervallen ist der Graph von f linksgekrümmt? Bestätigen Sie das durch geeignete Rechnung!
   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte rechnerisch!
   c) Die waagrechte Wendetangente schließt mit dem Graphen von f eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A.

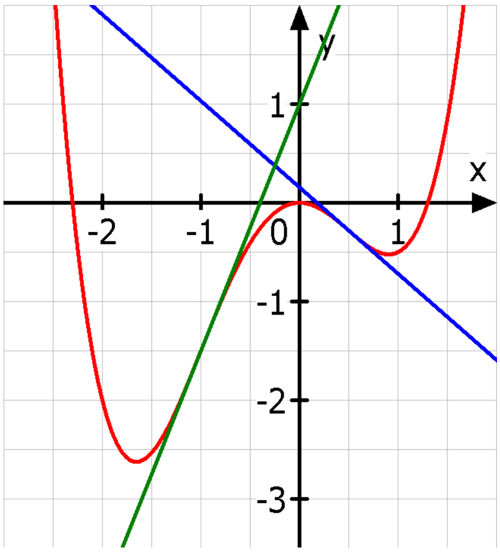


2. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion

   $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x^4 + x^3 - 3x^2\right)$

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen, und berechnen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
   b) Bestimmen Sie die Gleichung der beiden (eingezeichneten) Wendetangenten.
   c) Der Graph von f und die beiden Wendetangenten schließen eine Fläche mit dem Inhalt A ein. Berechnen Sie A.

   (Ergebnis: $A = \frac{243}{1280} \approx 0{,}19$)

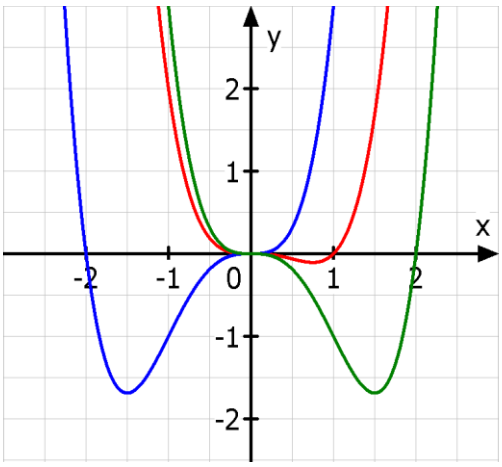


3. Das Bild zeigt drei Graphen der Funktionenschar $f_k(x) = x^4 + k \cdot x^3$ mit $k \in R$.

   a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f_k in Abhängigkeit von k.
   b) Geben Sie zu den drei abgebildeten Graphen die zugehörigen Werte für k an.

   Im Folgenden wird nur noch die Funktion mit dem blauen Graphen untersucht.

   c) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte für diese Funktion.
   d) Bestimmen Sie die Gleichungen der Wendetangente.
   e) Bestimmen Sie den endlichen Flächeninhalt, den der Graph der Funktion mit der x-Achse einschließt.



Q12 * Mathematik * Wendepunkte und Art der Extrema

1. a) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ und $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1$ und $f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \,]0\,;1[$

G_f ist linkgekrümmt $\Leftrightarrow\; f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathbb{R} \setminus [0\,;1]$

b) waagrechte Tangenten: $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 6x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2(2x-3) = 0$

$\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1{,}5$ und $y_1 = 1;\; y_2 = -11/16$

$f''(0) = 0$ also keine Aussage über Art des Extremums möglich.

$f'(x) = 2x^2(2x-3)$ ändert an der Stelle $x_1 = 0$ das Vorzeichen nicht, d.h. es liegt an der Stelle $x_1 = 0$ ein Terrassenpunkt $TP(0/1)$ vor.

Bei $x_2 = 1{,}5$ ändert $f'(x)$ das Vorzeichen (von - auf +), d.h. es liegt ein Tiefpunkt vor.

Dies bestätigt auch die Ableitung von f , denn es gilt $f''(1{,}5) = 9 > 0$.-

c) Die beiden Wendepunkte sind (0/1) und (1/0); WP(0/1) ist Terrassenpunkt.

Die waagrechte Wendetangente lautet also $y = 1$.

Schnittpunkt von waagrechter Wendetangente und Graph von f : $f(x) = 1$

$\Leftrightarrow\; x^4 - 2x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder $x_3 = 2$

$$A = \int_0^2 1 - f(x)\,dx = \int_0^2 -x^4 + 2x^3\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = -\frac{32}{5} + 8 = 1{,}6$$

2. a) $f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{2}\cdot\left(x^2 + x - 3\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 0$ oder $x^2 + x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow$

$x_{1/2} = 0 \;;\; x_{3/4} = \frac{1}{2}\cdot\left(-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}\right) = \frac{1}{2}\cdot(-1 \pm \sqrt{13})$; also $x_3 \approx -2{,}3$ und $x_4 \approx 1{,}3$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(4x^3 + 3x^2 - 6x)$ und $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{2}\cdot(4x^2 + 3x - 6) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder

$4x^2 + 3x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0$ oder $x_{5/6} = \frac{1}{8}\cdot\left(-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 4\cdot(-6)}\right) = \frac{1}{8}(-3 \pm \sqrt{105})$

$x_5 \approx 0{,}91$ und $x_6 \approx -1{,}66$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(12x^2 + 6x - 6) = 3\cdot(2x^2 + x - 1)$, also

$f''(x_5) \approx 4{,}7 > 0$; also $TIP_1(x_5 / y_5) \approx TIP_1(0{,}91 / -0{,}52)$ und

$f''(x_6) \approx +8{,}55 > 0$; also $TIP_2(x_6 / y_6) \approx TIP_2(-1{,}66 / -2{,}62)$

$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot(12x^2 + 6x - 6) = 3\cdot(2x^2 + x - 1)$ und $f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow$

$x_{7/8} = \frac{1}{2\cdot 2}(-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}) = \frac{1}{4}\cdot(-1 \pm 3)$, d.h. $x_7 = 0{,}5$ und $x_8 = -1$

Da $f''(x)$ an den Stellen x_7 und x_8 das Vorzeichen wechselt, liegen bei x_7 und x_8 Wendestellen vor. $WP_1(\frac{1}{2} / -\frac{9}{32})$ und $WP_2(-1 / -1{,}5)$

b) $f'(0,5) = -\frac{7}{8} = m_1$; blaue Wendetangente: $y = -\frac{7}{8}x + t_1$ WP_1 eingesetzt liefert

$-\frac{9}{32} = -\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2} + t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{5}{32}$ also $y = -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32}$ für die blaue Wendetangente;

$f'(-1) = 2,5 = m_2$; grüne Wendetangente: $y = 2,5x + t_2$ WP_2 eingesetzt liefert

$-1,5 = 2,5\cdot(-1) + t_2 \Rightarrow t_2 = 1$ also $y = 2,5x + 1$ für die grüne Wendetangente;

c) Schnittpunkt S der Wendetangenten:

$-\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} = \frac{5}{2}x + 1 \Rightarrow \frac{27}{8}x = -\frac{27}{32} \Rightarrow x_S = -\frac{1}{4}$ (und $y_S = \frac{3}{8}$)

$$A = \int_{-1}^{x_S} 2,5x + 1 - \frac{1}{2}\cdot(x^4 + x^3 - 3x^2)\,dx + \int_{x_S}^{0,5} -\frac{7}{8}x + \frac{5}{32} - \frac{1}{2}\cdot(x^4 + x^3 - 3x^2)\,dx =$$

$$\left[\frac{5x^2}{4} + x - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2}\right]_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left[-\frac{7x^2}{16} + \frac{5x}{32} - \frac{x^5}{10} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{2}\right]_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$-\frac{461}{2560} - \left(-\frac{11}{40}\right) + \frac{13}{640} - \left(-\frac{191}{2560}\right) = \frac{243}{2560} + \frac{243}{2560} = \frac{243}{1280} \approx 0,19$$

3. a) $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x+k) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$ (dreifache NSt.) ; $x_2 = -k$

b) Blauer Graph: k = 2 ; grüner Graph: k = -2 ; roter Graph: k = -1

c) $f_2'(x) = 4x^3 + 6x^2 = x^2\cdot(4x+6)$; $f_k''(x) = 12x^2 + 12x = 12x\cdot(x+1)$

Extrema:

$f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(4x+6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_3 = -\frac{3}{2}$ und $y_1 = 0$; $y_3 = -\frac{27}{16} = -1,6875$

Beachte: Bei x_1 ändert $f_k'(x)$ das Vorzeichen nicht! Dort liegt damit kein Hoch- bzw. Tiefpunkt (sondern ein Terrassenpunkt).

$f_2''(x_3) = f_2''(-\frac{3}{2}) = 12\cdot\frac{9}{4} - \frac{12\cdot 3}{2} = 9 > 0$ also Tiefpunkt $(-\frac{3}{2} / -\frac{27}{16})$ wegen „Linkskrümmung" des Graphen an der Stelle x_3.

Wendepunkte: $f_2''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_4 = -1$ und $y_4 = -1$

Da $f_2''(x)$ bei x_1 und auch bei x_4 das Vorzeichen wechselt, hat der Graph die Wendepunkte (0/0) und (-1/-1).

d) Die Wendetangente durch (0/0) hat die Gleichung y = 0 (das ist die x-Achse)

Wendetangente durch (-1/-1) : $m = f_2'(-1) = 4\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 = 2$

Wendetangente: $y = 2x + t$ und $(-1/-1)$ eingesetzt: $-1 = -2 + t \Rightarrow t = 1$

also Wendetangente $y = 2x + 1$

e) $$A = \int_{-2}^{0} 0 - f_2(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x^4 - 2x^3\,dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2}\right]_{-2}^{0} =$$

$$0 - \left(-\frac{-32}{5} - \frac{16}{2}\right) = 8 - 6,4 = 1,6$$