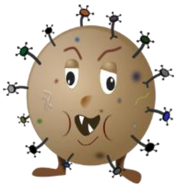
Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion

1. In einer Zellkultur beobachtet man pro 12 Minuten eine Zunahme der Zellenanzahl um 4,5%.
   a) Beschreiben Sie die Anzahl A(t) der Zellen durch eine passende Exponentialfunktion.
   b) In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Anzahl der Zellen.

2. Die Bevölkerung eines Landes wächst pro Jahr um 1,3%.
   a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
   b) In welcher Zeit nimmt die Population um 25% zu?



3. Eine Bakterienkultur wächst pro Stunde um 14%.
   a) Geben Sie die Anzahl N(t) der Bakterien als Exponentialfunktion an.
   b) Nach welcher Zeit hat sich die Bakterienzahl verzehnfacht?

4. Die Bevölkerung eines Landes ist in 10 Jahren von 8,75 Millionen auf gegenwärtig 9,35 Millionen gewachsen.
   a) Beschreiben Sie die Bevölkerungszahl mit Hilfe einer geeigneten Funktion.
   b) Wie viel Prozent beträgt die jährliche Zuwachsrate?
   c) In wie vielen Jahren kann man mit einer Bevölkerung von 10,0 Millionen rechnen?

5. Die Halbwertzeit von Jod 131 beträgt 8,02 Tage.
   a) Geben Sie die Anzahl N(t) der noch nicht zerfallenen Jodatomkerne an.
   b) Welcher Prozentsatz an Jod zerfällt täglich?
   c) Nach welcher Zeit sind 99% des radioaktiven Jods zerfallen?

6. Die Intensität von Licht wird beim Durchgang durch eine Glasplatte der Dicke 5,0mm durch Absorptionsprozesse um 1,2% abgeschwächt.
   a) Geben Sie die Intensität I(x) von Licht nach dem Durchgang durch Glas der Dicke x an.
   b) Welcher Anteil des Lichts wird durch 10 Glasplatten der Dicke 5,0mm absorbiert?
   c) Wie viele Glasplatten benötigt man, um die Intensität von Licht auf die Hälfte zu reduzieren?

7. Die Speicherkapazität (Speicherdichte) moderner Computer (Zahl der Transistoren pro Flächeneinheit eines Silizium-Mikroprozessors) wird in Bit pro cm^2 (heutzutage eher in Gigabit pro cm^2) gemessen.
   Das berühmte Mooresche Gesetz besagt, dass sich diese Speicherdichte seit 1970 alle 18 Monate verdoppelt. 1970 betrug die Speicherdichte 10^3 Bit pro cm^2.
   Welcher Wert ergibt sich nach dem Mooreschen Gesetz für 1990, 2000, 2100 bzw. 2014?
   (Vergleichen Sie: 2010 lag die maximale Speicherdichte bei etwa 115 Gigabit pro cm^2)

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Die Exponentialfunktion als Wachstumsfunktion

1. a) $A(t) = A_o \cdot (1+4,5\%)^{\frac{t}{12\,\text{min}}} = A_o \cdot (1,045)^{\frac{t}{12\,\text{min}}}$

   b) $A(t_1) = 2 \cdot A_o \;\Leftrightarrow\; A_o \cdot (1,045)^{\frac{t_1}{12\,\text{min}}} = 2 \cdot A_o \;\Leftrightarrow\; (1,045)^{\frac{t_1}{12\,\text{min}}} = 2 \;\Leftrightarrow\; \frac{t_1}{12\,\text{min}} = \log_{1,045} 2 \;\Leftrightarrow$

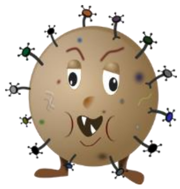
   $\frac{t_1}{12\,\text{min}} = \log_{1,045} 2 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 12\,\text{min} \cdot \log_{1,045} 2 = 188,96...\,\text{min} \approx 3\text{h}\,9\,\text{min}$

2. a) $N(t) = N_o \cdot (1+1,3\%)^{\frac{t}{1a}} = N_o \cdot (1,013)^{\frac{t}{1a}}$

   b) $1,25 \cdot N_o = N(t_1) = N_o \cdot (1,013)^{\frac{t_1}{1a}} \;\Leftrightarrow\; 1,25 = (1,013)^{\frac{t_1}{1a}} \;\Leftrightarrow\; \frac{t_1}{1a} = \log_{1,013} 1,25 \;\Leftrightarrow$

   $t_1 = 1a \cdot \log_{1,013} 1,25 = 17,27...a \approx 17\,a$

3. a) $N(t) = N_o \cdot (1+14\%)^{\frac{t}{1h}} = N_o \cdot (1,14)^{\frac{t}{1h}}$



   b) $10 \cdot N_o = N(t_1) = N_o \cdot (1,14)^{\frac{t_1}{1h}} \;\Leftrightarrow\; 10 = (1,14)^{\frac{t_1}{1h}} \;\Leftrightarrow\; \frac{t_1}{1h} = \log_{1,14} 10 \;\Leftrightarrow$

   $t_1 = 1h \cdot \log_{1,14} 10 = 17,57...h \approx 18\,h$

4. a) $N(t) = N_o \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ und $N_o = 8,75 \cdot 10^6$ mit $t=0 \,\hat{=}\,$ Zeit vor 10 Jahren

   $9,35 \cdot 10^6 = N(10\,a) \;\Leftrightarrow\; 9,35 \cdot 10^6 = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{10a}{T}} \;\Leftrightarrow\; \frac{9,35}{8,75} = 2^{\frac{10a}{T}} \;\Leftrightarrow$

   $\frac{10a}{T} = \log_2 \frac{9,35}{8,75} \;\Leftrightarrow\; T = \frac{10a}{\log_2 \frac{9,35}{8,75}} \approx 104,5\,a$ also $N(t) = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t}{104,5a}}$

   b) $N(t) = N_o \cdot 2^{\frac{t}{104,5a}} \;\Rightarrow\; N(1a) = N_o \cdot 2^{\frac{1a}{104,5a}} = 1,006655 \cdot N_o = (1+0,67\%) \cdot N_o$

   Die jährliche Zuwachsrate pro Jahr beträgt etwa 0,67 %.

   c) $10 \cdot 10^6 = N(t_1) \;\Rightarrow\; 10 \cdot 10^6 = 8,75 \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{t_1}{104,5a}} \;\Leftrightarrow\; \frac{10}{8,75} = 2^{\frac{t_1}{104,5a}} \;\Leftrightarrow$

   $\frac{t_1}{104,5\,a} = \log_2 \frac{10}{8,75} \;\Leftrightarrow\; t_1 = 104,5\,a \cdot \log_2 \frac{10}{8,75} = 20,1...a \approx 20\,a$

   In etwa 20 Jahren kann man mit einer Bevölkerungszahl von 10 Millionen rechnen.

5. a) $N(t) = N_o \cdot 0,5^{\frac{t}{8,02d}} = N_o \cdot 2^{\frac{-t}{8,02d}}$

   b) $N(1d) = N_o \cdot 2^{-\frac{1d}{8,02d}} = 0,9172... \cdot N_o \approx 91,7 \cdot N_o$

   Täglich zerfallen also etwa 8,3% des radioaktiven Iods 131.

   c) $0,01 \cdot N_o = N(t_1) = N_o \cdot 2^{-\frac{t_1}{8,02d}} \;\Leftrightarrow\; 0,01 = 2^{-\frac{t_1}{8,02d}} \;\Leftrightarrow\; -\frac{t_1}{8,02\,d} = \log_2 0,01 \;\Leftrightarrow$

   $t_1 = -8,02\,d \cdot \log_2 0,01 \approx 53d$

   Nach etwa 53 Tagen sind also 99% des radioaktiven Jods 131 zerfallen.

6. a) $I(x) = I_o \cdot (1-1,2\%)^{\frac{x}{5,0\text{mm}}} = I_o \cdot 0,988^{\frac{x}{5,0\text{mm}}}$

b) $I(10 \cdot 5,0\text{mm}) = I(50\text{mm}) = I_o \cdot 0,988^{\frac{50\text{mm}}{5,0\text{mm}}} = I_o \cdot 0,988^{10} = 88,6 \cdot I_o$

Es werden also 100% – 88,6% = 11,4% der Strahlung absorbiert.

c) $I(x_1) = 0,50 \cdot I_o \Leftrightarrow I_o \cdot 0,988^{\frac{x_1}{5,0\text{mm}}} = 0,50 \cdot I \Leftrightarrow 0,988^{\frac{x_1}{5,0\text{mm}}} = 0,50 \Leftrightarrow$

$$\frac{x_1}{5,0\text{mm}} = \log_{0,988} 0,50 \Leftrightarrow x = 5,0\text{mm} \cdot 57,4... = 287,...\text{mm}$$

Man benötigt also mindestens 58 Glasplatten der Dicke 5,0mm.

7. Speicherdichte $D(t) = D_o \cdot 2^{\frac{t}{1,5\,a}}$ mit $D_o = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2}$ und $t \widehat{=}$ Anzahl der Jahre nach 1970.

$1990 \widehat{=} t_1 = 20a$ also $D(20a) = D_o \cdot 2^{\frac{20a}{1,5\,a}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{20}{1,5}} = 1,0 \cdot 10^7 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 10 \frac{\text{Megabit}}{\text{cm}^2}$

$2000 \widehat{=} t_1 = 30a$ also $D(30a) = D_o \cdot 2^{\frac{30a}{1,5\,a}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{20} = 1,0 \cdot 10^9 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 1,0 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

$2010 \widehat{=} t_1 = 40a$ also $D(40a) = D_o \cdot 2^{\frac{40a}{1,5\,a}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{40}{1,5}} = 1,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 110 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

$2014 \widehat{=} t_1 = 44a$ also $D(44a) = D_o \cdot 2^{\frac{44a}{1,5\,a}} = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} \cdot 2^{\frac{44}{1,5}} = 6,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2} = 680 \frac{\text{Gigabit}}{\text{cm}^2}$

Hinweis:
Gibt j die Jahreszahl an, so kann man auch schreiben

$$D(j) = D_o \cdot 2^{\frac{j-1970}{1,5}} \quad \text{mit} \quad D_o = 10^3 \frac{\text{Bit}}{\text{cm}^2}$$