Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Logarithmen

Für $a \in R^+$ und $b \in R^+$ definert man : $b^x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b a$

Man bezeichnet $\log_b a$ als „Logarithmus von a zur Basis b“.

Der Logarithmus von a zur Basis b ist also die Zahl z,
mit der man b potenzieren muss, um a zu erhalten.
Für den Logarithmus $\log_{10}$ zur Basis 10 schreibt man kurz auch lg oder log.

Aufgaben

1. Bestimmen Sie durch Überlegen die folgenden Logarithmen:

a)	$\log_2 8$	b)	$\log_2 0,5$	c)	$\log_2 \sqrt{2}$	d)	$\log_2 1$
e)	$\log_{0,5} 8$	f)	$\log_{0,5} 0,5$	g)	$\log_{0,5} \sqrt{2}$	h)	$\log_{0,5} 0,25$
i)	$\log_{\sqrt{2}} 8$	j)	$\log_{\sqrt{2}} 0,5$	k)	$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$	l)	$\log_{\sqrt{2}} 0,25$
m)	$\log_8 2$	n)	$\log_{16} 0,5$	p)	$\log_{32} \sqrt{2}$	q)	$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

2. Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung durch Überlegen und schreiben Sie die Lösung auch als Logarithmus.

a)	$3^x = 27$	b)	$3^x = \dfrac{1}{9}$	c)	$3^x = 3\sqrt{3}$	d)	$3^x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
e)	$10^x = 1000$	f)	$10^x = 0,0001$	g)	$10^x = 0,1 \cdot \sqrt{10}$	h)	$10^x = \sqrt[3]{0,1}$

3. Bestimmen Sie den Wert des Logarithmus (mit Hilfe des Taschenrechners) auf Hundertstel genau.

a)	$\log_5 2$	b)	$\log_2 5$	c)	$\log_7 14$	d)	$\log_3 8$
e)	$\log_{0,1} 2$	f)	$\log_{10} 5$	g)	$\log_9 90$	h)	$\log_{0,8} 2$

4. Bestimmen Sie den Wert der Variablen a.

a)	$\log_a 8 = 3$	b)	$\log_{\sqrt{a}} 8 = 3$	c)	$\log_{a^2} 64 = 3$	d)	$\log_a 0,25 = 2$
e)	$\log_{\sqrt{a}} 0,125 = 3$	f)	$\log_{a^2} 27 = 3$	g)	$\log_{2a} 16 = 2$	h)	$\log_{2a} 8 = 2$

5. Der Graph der Funktion $f: \quad x \mapsto \log_2 x$ soll untersucht werden.
   a) Welche Definitionsmenge hat die Funktion f ?
   b) Erstellen Sie eine Wertetabelle mit einfach zu ermittelnden Funktionswerten.
   c) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen.
   Welche typischen Eigenschaften hat der Graph dieser Logarithmusfunktion?
   d) Zeichnen Sie zusätzlich den Graph der Exponentialfunktion $y = 2^x$ ein.
   Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Graphen zu $f(x) = \log_2 x$ und $y = 2^x$?

Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Logarithmen * Lösungen

1. a) $\log_2 8 = 3$, denn $2^3 = 8$ b) $\log_2 0{,}5 = -1$, denn $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

c) $\log_2 \sqrt{2} = 0{,}5$, denn $2^{0{,}5} = \sqrt{2}$ d) $\log_2 1 = 0$, denn $2^0 = 1$

e) $\log_{0{,}5} 8 = -3$ f) $\log_{0{,}5} 0{,}5 = 1$ g) $\log_{0{,}5} \sqrt{2} = -0{,}5$

h) $\log_{0{,}5} 0{,}25 = 2$ i) $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ j) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}5 = -2$

k) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 1$ l) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}25 = -4$ m) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

n) $\log_{16} 0{,}5 = -0{,}25$ p) $\log_{32} \sqrt{2} = 0{,}1$ q) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = 3$

2. a) $3^x = 27 \Leftrightarrow x = \log_3 27 = 3$ b) $3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{1}{9} = -2$

c) $3^x = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \log_3 3\sqrt{3} = 1{,}5$ d) $3^x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{3} = -0{,}5$

e) $10^x = 1000 \Leftrightarrow x = \lg 1000 = 3$ f) $10^x = 0{,}0001 \Leftrightarrow x = \lg 0{,}0001 = -4$

g) $10^x = 0{,}1 \cdot \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \lg 0{,}1 \cdot \sqrt{10} = -0{,}5$

h) $10^x = \sqrt[3]{0{,}1} \Leftrightarrow x = \lg \sqrt[3]{0{,}1} = -\frac{1}{3}$

3. a) $\log_5 2 = 0{,}43...$, denn $5^{0{,}43} = 1{,}997... < 2 < 5^{0{,}44} = 2{,}030...$

b) $\log_2 5 = 2{,}32...$, denn $2^{2{,}32} = 4{,}993... < 5 < 2^{2{,}33} = 5{,}028...$

c) $\log_7 14 = 1{,}35...$ d) $\log_3 8 = 1{,}89...$ e) $\log_{0{,}1} 2 = -0{,}30...$

f) $\log_{10} 5 = 0{,}69...$ g) $\log_9 90 = 2{,}04...$ h) $\log_{0{,}8} 2 = -3{,}10$

4. a) $\log_a 8 = 3 \Leftrightarrow a = 2$, denn $2^3 = 8$ b) $\log_{\sqrt{a}} 8 = 3 \Leftrightarrow a = 4$, denn $(\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

c) $\log_{a^2} 64 = 3 \Leftrightarrow a = 2$, denn $(2^2)^3 = 2^6 = 64$ d) $\log_a 0{,}25 = 2 \Leftrightarrow a = 0{,}5$, denn $0{,}5^2 = 0{,}25$

e) $\log_{\sqrt{a}} 0{,}125 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$, denn $\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \frac{1}{8}$ f) $\log_{a^2} 27 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$, denn $\left(\sqrt{3}^2\right)^3 = 3^3 = 27$

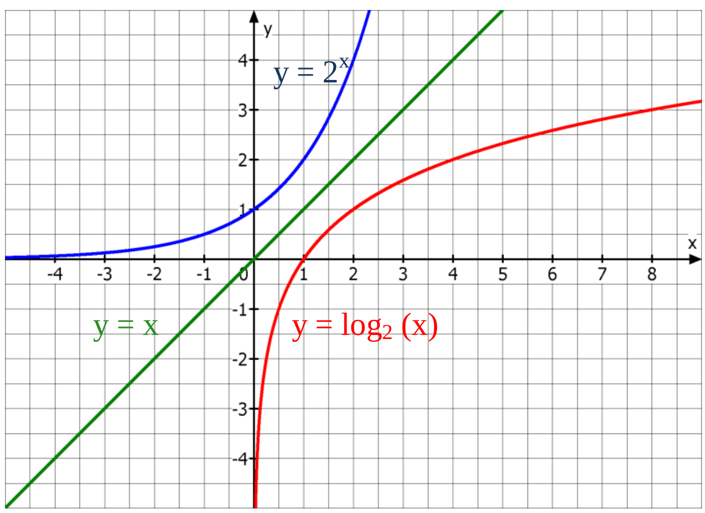
g) $\log_{2a} 16 = 2 \Leftrightarrow a = 2$, denn $(2 \cdot 2)^2 = 16$ h) $\log_{2a} 8 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$, denn $(2 \cdot \sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$

5. a) $f(x) = \log_2 x$ hat die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

b)

x	0,25	0,5	1	2	4	8
$\log_2(x)$	– 2	– 1	0	1	2	3

c)



d) Die Graphen zu $y = \log_2 (x)$ und $y = 2^x$ liegen achsensymmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.