Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Ganzrationale Funktionen

1. Gegeben ist die Potenzfunktion $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in R$ und $n \in N$.
   Bestimmen Sie n und a so, dass der Graph durch die beiden Punkte S und T geht.

   a) $S(1/0{,}5)$; $T(2/2)$
   b) $S(2/16)$; $T(-1/-2)$
   c) $S(2/1)$; $T(4/16)$
   d) $S(2/\frac{2}{3})$; $T(3/2{,}25)$

2. Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Graphen der Funktionen f und g.
   Bestätigen Sie anschließend mit einer Skizze Ihre Rechnung.

   a) $f(x) = 0{,}5x^2$; $g(x) = 2x + 2{,}5$
   b) $f(x) = -2x^2$; $g(x) = x - 1$
   c) $f(x) = 0{,}25x^3$; $g(x) = 2 \cdot x$
   d) $f(x) = -0{,}5x^2$; $g(x) = -2x + 2$
   e) $f(x) = 2 - x^2$; $g(x) = -x + 3$

3. Für welche Werte von m bzw. t berühren sich die beiden Graphen?

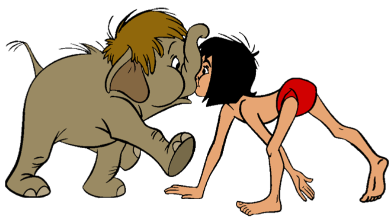
   a) $f(x) = x^2$; $g(x) = m \cdot x + 1$
   b) $f(x) = -0{,}5x^2$; $g(x) = x - t$
   c) $f(x) = 0{,}25x^2$; $g(x) = m \cdot x - 2 \cdot m$

4. Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ wird durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten bestimmt.

   So kommt z.B. der Graph von $f(x) = -0{,}2 \cdot x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ von links oben und geht nach rechts unten, denn so verlauft auch der Graph von $y = -0{,}2x^3$.

   Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

   a) $f(x) = (2 - 3x) \cdot (4x - 5x^2)$
   b) $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5x^2 - 2x^3 - 0{,}1x^4$
   c) $f(x) = (2 - 0{,}5x)^2 - 0{,}5x^2$
   d) $f(x) = (2x - x^2)^2 + 2x^3 - x^4$
   e) $f(x) = (2 + 3x^2) \cdot (4x - x^2) + 3x^4$
   f) $f(x) = (1 - 2x^3)^4 + 2x^{11} - 15x^{12}$
   g) $f(x) = (1 + 2x - 3x^2)^3$
   h) $f(x) = (x^2 - 2x)^3 - x^5$



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Ganzrationale Funktionen * Lösungen

1. a) $f(x) = a \cdot x^n$ und $S(1/0,5)$; $T(2/2)$

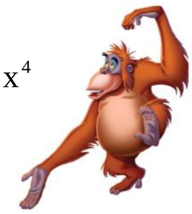
(1) $0,5 = a \cdot 1^n \Rightarrow a = 0,5$

(2) $2 = a \cdot 2^n \qquad \Rightarrow 2 = 0,5 \cdot 2^n \Rightarrow 4 = 2^n \Rightarrow n = 2$ also $f(x) = 0,5 \cdot x^2$

b) (1) $16 = a \cdot 2^n \qquad$ (1):(2) $\dfrac{16}{-2} = \dfrac{a \cdot 2^n}{a \cdot (-1)^n} \Rightarrow -8 = \left(\dfrac{2}{-1}\right)^n \Rightarrow -8 = (-2)^n \Rightarrow n = 3$

(2) $-2 = a \cdot (-1)^n \qquad$ also $16 = a \cdot 2^3 \Rightarrow a = 2$ und damit $f(x) = 2 \cdot x^3$

c) (1) $1 = a \cdot 2^n \qquad$ (2):(1) $\dfrac{16}{1} = \dfrac{a \cdot 4^n}{a \cdot 2^n} \Rightarrow 16 = 2^n \Rightarrow n = 4$



(2) $16 = a \cdot 4^n \qquad$ also $1 = a \cdot 2^4 \Rightarrow a = \dfrac{1}{16}$ und damit $f(x) = \dfrac{1}{16} \cdot x^4$

d) (1) $\dfrac{2}{3} = a \cdot 2^n \qquad$ (2):(1) $\dfrac{2,25}{\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \Rightarrow \dfrac{27}{8} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \Rightarrow n = 3$

(2) $2,25 = a \cdot 3^n \qquad$ also $2,25 = a \cdot 3^3 \Rightarrow a = \dfrac{2,25}{27} = \dfrac{1}{12}$ und damit $f(x) = \dfrac{1}{12} \cdot x^3$

2. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,5x^2 = 2x + 2,5 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \dfrac{1}{2} \cdot \left(4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}\right) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(4 \pm \sqrt{36}\right) = 2 \pm 3 \Leftrightarrow x_1 = 5$; $x_2 = -1$

$y_1 = g(5) = 2 \cdot 5 + 2,5 = 12,5$ und $y_2 = g(-1) = 2 \cdot (-1) + 2,5 = 0,5$

also Schnittpunkte $S_1(5/12,5)$ und $S_2(-1/0,5)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,5$; $x_2 = -1$; $S_1(0,5/-0,5)$ und $S_2(-1/-2)$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 0,25x \cdot (x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2\sqrt{2}$

also $S_1(0/0)$; $S_2(2\sqrt{2}/4\sqrt{2})$; $S_2(-2\sqrt{2}/-4\sqrt{2})$

d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,5x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0,5$; nur ein Schnittpunkt $S_1(0,5/0)$

e) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$ keine Lösung also kein Schnittpunkt

3. a) $f(x) = g(x)$ muss genau eine Lösung haben, wenn sich die beiden Graphen berühren sollen

$x^2 = m \cdot x + 1 \Leftrightarrow x^2 - m \cdot x - 1 = 0$ hat genau eine Lösung, wenn $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow m^2 = -4$ hat keine Lösung, d.h. Berührung für kein m möglich.

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,5x^2 + x - t = 0$ genau eine Lösung für $D = 1^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-t) = 0 \Leftrightarrow$

$1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -0,5$ Berührpunkt $P(-1/-0,5)$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0,25x^2 - m \cdot x + 2m = 0$; genau eine Lösung $\Leftrightarrow D = m^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 2m = 0$

$\Leftrightarrow m \cdot (m - 2) = 0$; $m_1 = 0$ Berührpunkt $P_1(0/0)$; $m_2 = 2$ Berührpunkt $P_2(4/4)$

4. a) $f(x) = (2-3x)\cdot(4x-5x^2) = 15x^3 - 22x^2 + 8x$
also $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$

b) $f(x) = 0{,}5x + 2{,}5x^2 - 2x^3 - 0{,}1x^4$ also $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$

c) $f(x) = (2-0{,}5x)^2 - 0{,}5x^2 = -0{,}25x^2 - 2x + 4$ also $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$

d) $f(x) = (2x-x^2)^2 + 2x^3 - x^4 = -2x^3 + 4x^2$ also $f(x) \to \mp\infty$ für $x \to \pm\infty$

e) $f(x) = (2+3x^2)\cdot(4x-x^2) + 3x^4 = 12x^3 - 2x^2 + 8x$
also $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$

f) $f(x) = (1-2x^3)^4 + 2x^{11} - 15x^{12} = 16x^{12} + 32x^9 + ... + 2x^{11} - 15x^{12} = x^{12} + 2x^{11}....$
also $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$

g) $f(x) = (1+2x-3x^2)^3 = -27x^6 ...$ also $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$

h) $f(x) = (x^2-2x)^3 - x^5 = x^6 - 6x^5 ... - x^5$ also $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$