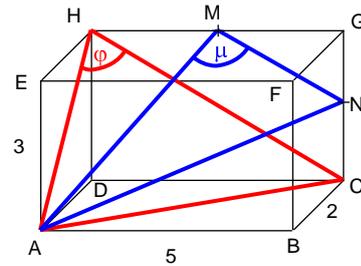


Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Sinus- und Kosinussatz

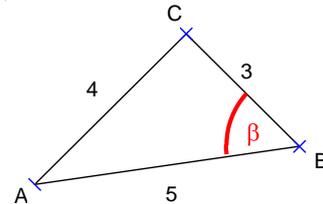
1. In einem Quader mit den Kantenlängen 5, 3 und 2 halbieren die Punkte M und N die Strecken [HG] bzw. [GC].

- a) Berechnen Sie im Dreieck ACH die Größe des Winkels $\varphi = \sphericalangle AHC$.
- b) Berechnen Sie im Dreieck ANM die Größe des Winkels $\mu = \sphericalangle AMN$.



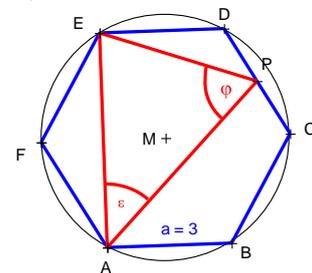
2. Im Dreieck ABC sind die drei Seiten $a = 3$, $b = 4$ und $c = 5$ bekannt.

Berechnen Sie die Größe des Winkels β .

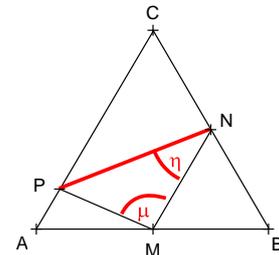


3. Im regulären Sechseck ABCDEF mit der Kantenlänge $a = 3$ halbiert P die Strecke [CD].

Berechnen Sie im Dreieck APE die drei Seitenlängen und den Winkel $\varphi = \sphericalangle EPA$.

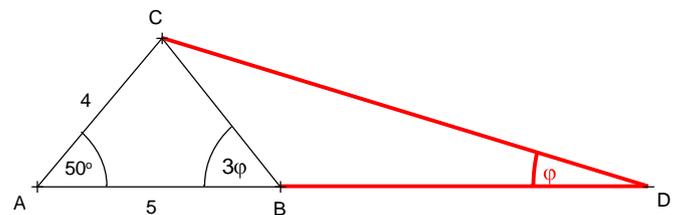


4. Im gleichseitigen Dreieck ABC mit der Kantenlänge 8 halbieren M und N die Seiten [AB] bzw. [CB] und [AP] hat die Länge 1,5. Berechnen Sie im Dreieck MNP die Länge der Strecke [PN] und die Größe der Winkel $\mu = \sphericalangle NMP$ und $\eta = \sphericalangle PNM$.



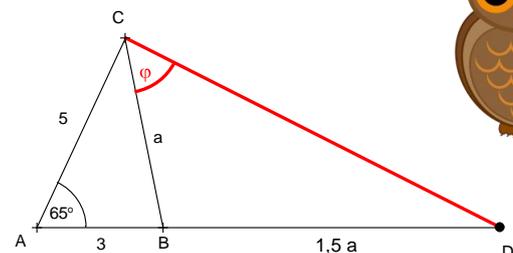
5. Im Dreieck ABC sind die Streckenlängen $\overline{AB} = 5$ und $\overline{AC} = 4$ sowie der Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC = 50^\circ$ bekannt.

Berechnen Sie im Dreieck BDC die Länge der Strecken [BD] und [CD] sowie die Größe von φ .



6. Im Dreieck ABC sind die Streckenlängen $\overline{AB} = 3$ und $\overline{AC} = 5$ sowie der Winkel $\alpha = \sphericalangle BAC = 65^\circ$ bekannt.

Berechnen Sie im Dreieck BDC die Länge der Strecke [CD] sowie die Größe von φ .



Mathematik * Jahrgangsstufe 10 * Aufgaben zum Sinus- und Kosinussatz * Lösungen

1. a) $\overline{AC}^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\overline{AH} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$; $\overline{HC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
 $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 - 2 \cdot \overline{AH} \cdot \overline{HC} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{13+34-29}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{34}} = 0,42808... \Rightarrow \varphi \approx 64,7^\circ$

b) $\overline{AN}^2 = \overline{NC}^2 + \overline{AC}^2 \Rightarrow \overline{AN} = \sqrt{1,5^2 + 29} = \sqrt{31,25} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{5}$;
 $\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HM}^2 \Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{13+2,5^2} = \sqrt{\frac{77}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{77}$; $\overline{MN} = \sqrt{2,5^2 + 1,5^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{34}$;
 $\overline{AN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MN}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{MN} \cdot \cos(\mu) \Rightarrow$
 $\cos(\mu) = \frac{19,25+8,5-31,25}{2 \cdot \sqrt{19,25} \cdot \sqrt{8,5}} = -0,1368.. \Rightarrow \mu \approx 97,9^\circ$



2. $4^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos(\beta) \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{25+9-16}{2 \cdot 5 \cdot 3} = 0,60 \Rightarrow \beta \approx 53,1^\circ$

3. Alle Innenwinkel im Sechseck ABCDEF haben die Größe $4 \cdot 180^\circ : 6 = 120^\circ$.

$$\overline{EP}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{DP}^2 - 2 \cdot \overline{ED} \cdot \overline{DP} \cdot \cos(120^\circ) \Rightarrow \overline{EP} = \sqrt{3^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot (-0,5)} = 0,5 \cdot \sqrt{63}$$

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2 - 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{FE} \cdot \cos(120^\circ) \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-0,5)} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$\overline{AC} = \overline{AE} = 3 \cdot \sqrt{3} \text{ und } \sphericalangle ACB = \sphericalangle FEA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ \Rightarrow$$

$$\sphericalangle PCA = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ \text{ (oder C auf Thaleskreis über [AD]) also}$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{PC}^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{27 + 1,5^2} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{13}$$

$$\overline{AE}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{EP} \cdot \overline{AP} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\overline{EP}^2 + \overline{AP}^2 - \overline{AE}^2}{2 \cdot \overline{EP} \cdot \overline{AP}} = \frac{15,75 + 29,25 - 27}{2 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{63} \cdot 1,5 \cdot \sqrt{13}} = 0,4193... \Rightarrow \varphi \approx 65,2^\circ$$



4. $\overline{CN} = \overline{NB} = \overline{BM} = \overline{MA} = \overline{MN} = 8 : 2 = 4$

$$\overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AM}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AM} \cdot \cos 60^\circ = 1,5^2 + 4^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 12,25 \Rightarrow \overline{PM} = 3,5$$

Für $\varphi = \sphericalangle PMA$ gilt:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PM}} \Rightarrow \sin \varphi = \sin 60^\circ \cdot \frac{1,5}{3,5} = 0,37115... \Rightarrow \varphi = 21,786...^\circ \approx 21,8^\circ$$

$$\mu = 180^\circ - 60^\circ - \varphi \approx 120^\circ - 21,8^\circ = 98,2^\circ$$

$$\overline{PN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{MN}^2 - 2 \cdot \overline{PM} \cdot \overline{MN} \cdot \cos \mu \approx 3,5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 4 \cdot \cos 98,2^\circ = 32,2436... \Rightarrow$$

$$\overline{PN} = 5,6783... \approx 5,7 \text{ und } \frac{\sin \eta}{\sin \mu} = \frac{\overline{PM}}{\overline{PN}} \Rightarrow \sin \eta \approx \sin 98,2^\circ \cdot \frac{3,5}{5,68} \approx 0,60989... \Rightarrow \eta \approx 37,6^\circ$$

$$5. \quad \overline{CB}^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 50^\circ = 15,288... \Rightarrow \overline{CB} = 3,910... \approx 3,9$$

$$\frac{\sin(3\varphi)}{\sin 50^\circ} = \frac{4}{\overline{CB}} \Rightarrow \sin(3\varphi) \approx \sin 50^\circ \cdot \frac{4}{3,91} = 0,7836... \Rightarrow \varphi = \frac{1}{3} \cdot 51,598...^\circ = 17,199...^\circ \approx 17,2^\circ$$

$$\text{Für } \beta = \sphericalangle DBC \text{ gilt: } \beta = 180^\circ - 3\varphi = 180^\circ - 51,598...^\circ \approx 128,4^\circ$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \beta} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} \approx 3,91 \cdot \frac{\sin 128,4^\circ}{\sin 17,2^\circ} = 10,36... \approx 10,4$$

$$\varepsilon = \sphericalangle BCD = 180^\circ - \beta - \varphi \approx 180^\circ - 128,4^\circ - 17,2^\circ = 34,3^\circ$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{CB} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \approx 3,91 \cdot \frac{\sin 34,3^\circ}{\sin 17,2^\circ} = 7,451... \approx 7,5$$

$$6. \quad \overline{CB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 65^\circ = 21,321... \Rightarrow a = \overline{CB} = 4,617... \approx 4,6$$

Für $\beta = \sphericalangle CBA$ gilt:

$$\frac{\sin \beta}{\sin 65^\circ} = \frac{5}{\overline{CB}} \Rightarrow \sin \beta \approx \sin 65^\circ \cdot \frac{5}{4,62} = 0,9808... \Rightarrow \beta = 78,769...^\circ \approx 78,8^\circ$$

$$\text{Für } \varepsilon = \sphericalangle DBC \text{ gilt } \varepsilon = 180^\circ - \beta \approx 180^\circ - 78,8^\circ = 101,2^\circ$$

$$\overline{CD}^2 = a^2 + (1,5a)^2 - 2 \cdot a \cdot 1,5a \cdot \cos \varepsilon = 3,25a^2 - 3a^2 \cdot \cos \varepsilon \approx 3,25 \cdot 21,32 - 3 \cdot 21,32 \cdot \cos 101,2^\circ$$

$$\overline{CD}^2 \approx 81,713... \Rightarrow \overline{CD} = 9,039... \approx 9,0$$

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varepsilon} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \Rightarrow \sin \varphi = \sin \varepsilon \cdot \frac{1,5 \cdot \overline{BC}}{\overline{CD}} \approx \sin 101,2^\circ \cdot \frac{1,5 \cdot 4,62}{9,04} = 0,75199... \Rightarrow$$

$$\varphi = 48,76...^\circ \approx 48,8^\circ$$

