Q11 * Mathematik * Aufgaben zur Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Bearbeiten Sie für die vier unten angegebenen Funktionen jeweils alle Aufgabenstellungen.
[Aufgabe d) ist bei der letzten Funktionen für Experten gedacht!]

a) Geben Sie den Definitionsbereich von f an, bestimmen Sie die Ableitung von f (möglichst weit vereinfachen!) und ermitteln Sie alle Stellen mit horizontalen Tangenten.

b) Entscheiden Sie, in welchen Intervallen die Funktion streng monoton steigt bzw. fällt.

c) Geben Sie nun alle Hoch-, Tief- bzw. Terrassenpunkte des Graphen von f an.

d) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion an den Grenzen des Definitionsbereichs!
Geben Sie dann unter Beachtung der Lösung von c) den Wertebereich der Funktion f an.

1. $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

2. $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 1)^3$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$

4. $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Q11 * Mathematik m6 * Aufgaben zur Produkt-, Quotienten- und Kettenregel * Lösungen

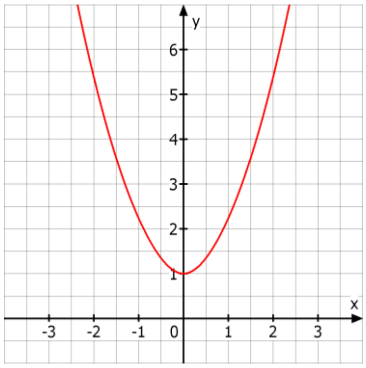
1. a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$; $D_f = \mathbb{R}$ denn $x^4 + 3x^2 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = (x^4 + 3x^2 + 1)^{1/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}} \cdot (4x^3 + 6x) = \frac{x \cdot (2x^2 + 3)}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}}$$

Horizontale Tangente: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

b)

x	x < 0	0	0 < x
f ´(x)	< 0	0	> 0



f ist in $]-\infty; 0]$ streng monoton fallend
und in $[0; \infty[$ streng monoton steigend.

c) G_f hat also bei (0/1) einen Tiefpunkt: TIP (0/1)

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = "\sqrt{\infty + \infty + 1}" = \infty$

also $W_f = [1; \infty[$

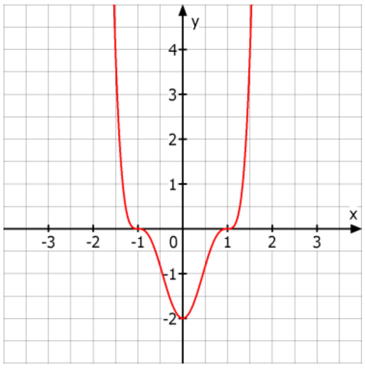
2. a) $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 1)^3$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 12x \cdot (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = -1$; $x_{4/5} = 1$

b)

x	x < – 1	– 1	– 1 < x < 0	0	0 < x < 1	1	1 < x
f ´(x)	< 0	0	< 0	0	> 0	0	> 0

f ist in $]-\infty; 0]$ streng monoton fallend
und in $[0; \infty[$ streng monoton steigend.



c) G_f hat also bei (0/– 2) einen Tiefpunkt: TIP (0/1)
und bei (– 1/0) und (0/1) je einen Terrassenpunkt.

d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = "2 \cdot (+\infty)^3" = \infty$

also $W_f = [-2; \infty[$

3. a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 2}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 2) \cdot (2x - 4) - (x^2 - 4x) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^2} =$

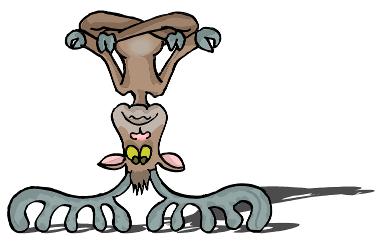
$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 4x - 8 - (2x^3 - 8x^2)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4x^2 + 4x - 8}{(x^2 + 2)^2} = \frac{4(x^2 + x - 2)}{(x^2 + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}) = \frac{-1 \pm 3}{2} ; \; x_1 = -2 ; \; x_2 = 1$$

b)

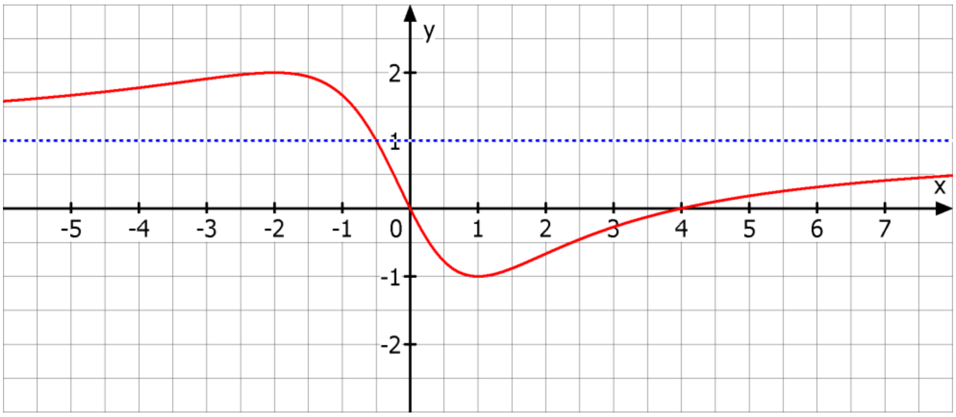
x	x < – 2	– 2	– 2 < x < 1	1	1 < x
f ´(x)	> 0	0	< 0	0	> 0

f ist in $]-\infty; -2]$ und in $[1; \infty[$ streng monoton steigend.
f ist in $[-2; 1]$ streng monoton fallend.



c) G_f hat damit bei (– 2/ 2) einen Hochpunkt
und bei (1 / – 1) einen Tiefpunkt.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4x}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{4}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \dfrac{1\mp 0}{1\pm 0} = 1$; also $W_f = [-1;\, 2]$



4. a) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - (x-2)\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x}{x^2+1} =$

$$\frac{(x^2+1) - (x-2)\cdot x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x+1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{1}{2}$

b)

x	$x < -0{,}5$	$-0{,}5$	$-0{,}5 < x$
$f'(x)$	< 0	0	> 0

f ist in $]-\infty;-0{,}5]$ streng monoton fallend.
f ist in $[-0{,}5\,;\,\infty[$ streng monoton steigend.

c) G_f hat damit bei $(-0{,}5\,/\,-\sqrt{5}\,)$ einen Tiefpunkt

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x-2}{\pm x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\pm\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \text{"}\dfrac{1\mp 0}{\sqrt{1+0}}\text{"} = 1;$

also $W_f = [-\sqrt{5};\, 1[$