Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Exponentialfunktion

1. Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = 1 + e^{1-x}$ und $g(x) = 2 \cdot e^{x-1}$.
   a) Skizzieren Sie die beiden Graphen.
   b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Graphen.
   c) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Graphen?

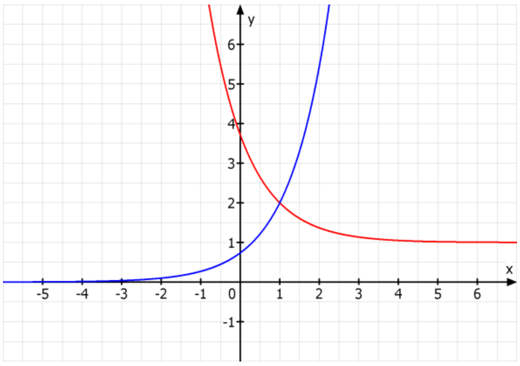
2. Gegeben sind die folgenden Funktionen mit
   $f(x) = e^{x}$; $g(x) = 0{,}5 \cdot e^{x}$; $h(x) = 0{,}5 \cdot e^{x-2}$; $k(x) = 0{,}5 \cdot e^{-x-2}$; $p(x) = -0{,}5 \cdot e^{-x-2}$.
   Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktionen in ein Koordinatensystem.
   Welche Beziehung besteht zwischen den Graphen?

3. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{1-x}$.
   a) In welchen Intervallen ist f streng monoton wachsend?
   b) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.
   c) Skizzieren Sie den Graphen von f.

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x^2 + x - 5) \cdot e^{x}$.
   Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f.

Q11 * Mathematik * Aufgaben zur natürlichen Exponentialfunktion * Lösungen

1. a)



b) Schnittpunkt S(1/2)

c) Schnittwinkel φ

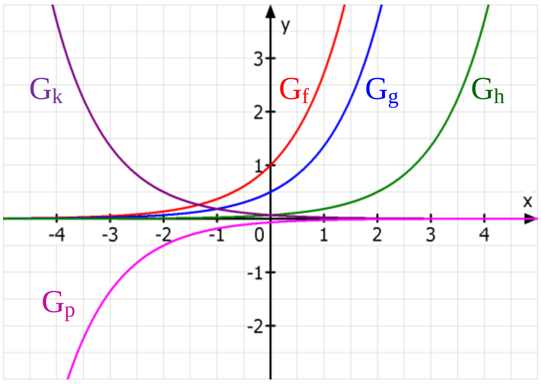
$f'(x) = -e^{1-x}$; $g'(x) = 2 \cdot e^{x-1}$;

$m_1 = f'(1) = -1$; $m_2 = g'(1) = 2$;

$\tan\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| = 3 \Rightarrow$

$\varphi \approx 71{,}6^\circ$

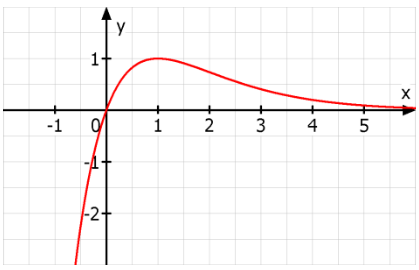
2. G_g um 2 nach rechts verschoben $\rightarrow G_h$
G_h an y-Achse gespiegelt $\rightarrow G_k$
G_k an x-Achse gespiegelt $\rightarrow G_p$



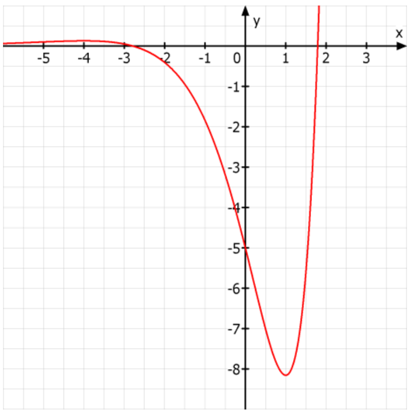
3. a) f ist streng monoton wachsend in $]-\infty ; 1]$, denn $f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$

b) HOP (1 / 1)

c)



4.

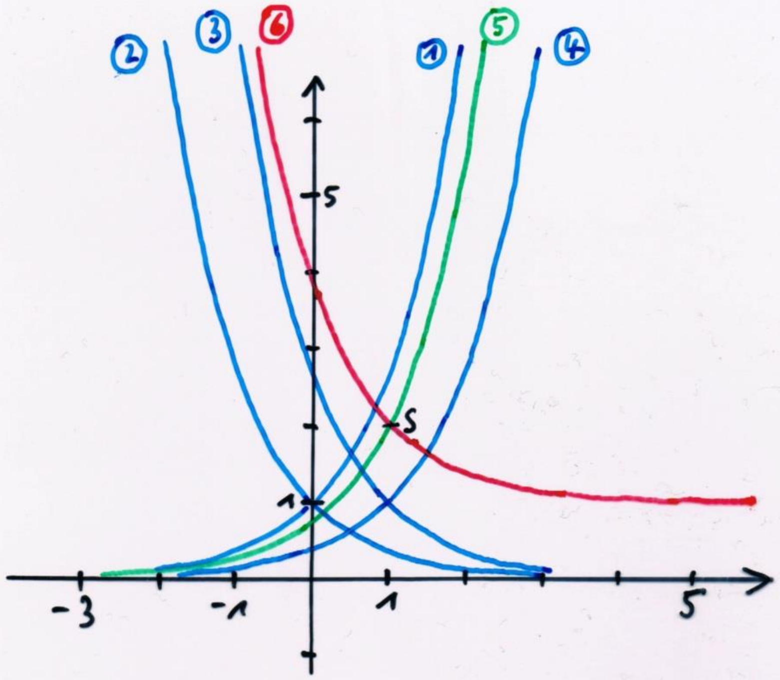


$HOP(-4/\frac{7}{e^4}) \approx (-4/0{,}13)$ und

$TIP(1/-3e) \approx (1/-8{,}15)$, denn

$f'(x) = (x^2 + 3x - 4) \cdot e^x = (x+4) \cdot (x-1) \cdot e^x$

1\. a, $f(x) = 1 + e^{1-x}$ $\quad g(x) = 2 \cdot e^{x-1}$



① $y = e^{x}$ ② $y = e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$

③ $y = e^{-(x-1)} = e^{1-x}$

④ $y = e^{x-1}$

⑤ $y = 2 \cdot e^{x-1}$ ⑥ $y = 1 + e^{1-x}$

b, Schnittpunkt S $\quad f(x) = g(x) \Leftrightarrow 1 + e^{1-x} = 2e^{x-1}$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{e}{e^{x}} = \frac{2e^{x}}{e} \;/\cdot e^{x} \quad \Leftrightarrow e^{x} + e = \frac{2}{e}(e^{x})^2 \;/\cdot \frac{e}{2}$

$\Leftrightarrow (e^{x})^2 - \frac{e}{2} \cdot e^{x} - \frac{e^2}{2} = 0$ $\quad$ Subst. $u = e^{x}$

$\Leftrightarrow u^2 - \frac{e}{2}u - \frac{e^2}{2} = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{e^2}{4} + 2e^2}\right)$

$u_{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9e^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} \pm \frac{3}{2}e\right) \quad u_1 = e \quad \left(u_2 = -\frac{e}{2}\right)$

$e^{x} = u = e \Leftrightarrow x = 1$ und $y = 2 \cdot e^{1-1} = 2 \quad S(1/2)$

c, $f'(x) = e^{1-x} \cdot (-1) = -e^{1-x} \quad g'(x) = 2e^{x-1} \;; \; f'(1) = -1 \;; g'(1) = 2$

Schnittwinkel $\varphi \quad \tan\varphi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{-1-2}{1-1\cdot 2}\right| = \left|\frac{-3}{-1}\right| = 3 \Rightarrow$

$\varphi = \tan^{-1}(3) = 71{,}56\ldots^\circ \approx 71{,}6^\circ$