Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 05.03.2012 * Gruppe A

1. Im R^3 sind die Punkte $A(1/-1/2)$, $B(3/1/3)$, $C(5/0/1)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, der von den vier Eckpunkten des Quadrats ABCD gleichen Abstand hat aber nicht in der Ebene dieses Quadrats liegt.

2. Im R^3 sind die Punkte $A(-4/8/-2)$, $B(5/2/4)$, $C(4/5/0)$ und $S(0/7/0)$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie im Dreieck ABC die Seitenlänge $c = \overline{AB}$ und die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.
   b) Die Höhe h_c von C auf AB trifft die Gerade AB im Fußpunkt F. Bestimmen Sie die Koordinaten von F.
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC. [Ergebnis: $F_{\Delta ABC} = 4{,}5\cdot\sqrt{17}$]
   d) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide ABCS. [Ergebnis: V = 6]
   e) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt.

Aufgabe	1a	b	2a	b	c	d	e	Summe
Punkte	5	4	3	4	3	3	3	25

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 05.03.2012 * Gruppe B

1. Im R^3 sind die Punkte $A(2/-1/2)$, $B(3/1/4)$, $C(1/0/6)$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass man das Dreieck ABC zu einem Quadrat ABCD ergänzen kann und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes P, der von den vier Eckpunkten des Quadrats ABCD gleichen Abstand hat aber nicht in der Ebene dieses Quadrats liegt.

2. Im R^3 sind die Punkte $A(-2/8/-3)$, $B(4/2/6)$, $C(0/5/5)$ und $S(0/7/1)$ gegeben.
   a) Bestimmen Sie im Dreieck ABC die Seitenlänge $c = \overline{AB}$ und die Größe des Winkels $\alpha = \sphericalangle BAC$.
   b) Die Höhe h_c von C auf AB trifft die Gerade AB im Fußpunkt F. Bestimmen Sie die Koordinaten von F.
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $F_{\Delta ABC}$ des Dreiecks ABC. [Ergebnis: $F_{\Delta ABC} = 4{,}5\cdot\sqrt{17}$]
   d) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide ABCS. [Ergebnis: V = 6]
   e) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt.

Aufgabe	1a	b	2a	b	c	d	e	Summe
Punkte	5	4	3	4	3	3	3	25

Gutes Gelingen! G.R.

Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 05.03.2012 * Gruppe A * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$ und $\overline{BC} = \sqrt{4+1+4} = 3 = \overline{AB}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 1\cdot(-2) = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ und damit kann man ABC zum Quadrat ergänzen. Für die vierte Ecke D gilt:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \;\Rightarrow\; \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} 1-3+5 \\ -1-1+0 \\ 2-3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{also } D(3/-2/0)$$

b) P muss senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen liegen.

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{A} + \vec{C}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1+5 \\ -1+0 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{P} = \vec{M} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -0{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$ also $P(2/1{,}5/-0{,}5)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \sqrt{81+36+36} = \sqrt{153} = 3\cdot\sqrt{17}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{72+18+12}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{64+9+4}} = \frac{102}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{77}} = 0{,}9397... \Rightarrow \alpha = 19{,}991...^{o} \approx 20{,}0^{o}$$

b) Projektion von $\overrightarrow{AC}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$.

$$\vec{F} - \vec{A} = \overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{102}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{153}} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{also } F(2/4/2)$$

c) $$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -12+18 \\ 48-18 \\ -27+48 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{4+100+49} = 4{,}5\cdot\sqrt{17}$$

oder $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{FC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{153}\cdot\sqrt{4+1+4} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 3 = 4{,}5\cdot\sqrt{17}$

d) $$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AS} \circ \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0+4 \\ 7-8 \\ 0+2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 21 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|8-10+14\right| = 6$$

e) $$6 = V = \frac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot d = \frac{1}{3}\cdot 4{,}5\cdot\sqrt{17}\cdot d = \frac{3\cdot\sqrt{17}}{2}\cdot d \;\Rightarrow\; d = \frac{6\cdot 2}{3\cdot\sqrt{17}} = \frac{4}{17}\cdot\sqrt{17}$$

Q11 * Mathematik m4
1. Extemporale im Kurshalbjahr 11/2 am 05.03.2012 * Gruppe B * Lösung

1. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$ und $\overline{BC} = \sqrt{4+1+4} = 3 = \overline{AB}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 1\cdot(-2)+2\cdot(-1)+2\cdot 2 = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ und damit kann man ABC zum Quadrat ergänzen. Für die vierte Ecke D gilt:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \;\Rightarrow\; \vec{D} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = \begin{pmatrix} 2-3+1 \\ -1-1+0 \\ 2-4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{also } D(0/-2/4)$$

b) P muss senkrecht über dem Schnittpunkt M der Diagonalen liegen.

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\cdot\left(\vec{A}+\vec{C}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2+1 \\ -1+0 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

z.B. $\vec{P} = \vec{M} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -2,5 \\ 5 \end{pmatrix}$ also $P(3,5/-2,5/5)$.

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overline{AB} = \sqrt{36+36+81} = \sqrt{153} = 3\cdot\sqrt{17}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}} = \frac{12+18+72}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{4+9+64}} = \frac{102}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{77}} = 0,9397... \Rightarrow \alpha = 19,991...^\circ \approx 20,0^\circ$$

b) Projektion von $\overrightarrow{AC}$ auf $\overrightarrow{AB}$ liefert $\overrightarrow{AF}$.

$$\vec{F} - \vec{A} = \overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC}\circ\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AB}}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{102}{\sqrt{153}\cdot\sqrt{153}}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{also } F(2/4/3)$$

c) $$F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -48+27 \\ 18-48 \\ -18+12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} -21 \\ -30 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{49+100+4} = 4,5\cdot\sqrt{17}$$

oder $F_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{FC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{153}\cdot\sqrt{4+1+4} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{17}\cdot 3 = 4,5\cdot\sqrt{17}$

d) $$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AS}\circ\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix} 0+2 \\ 7-8 \\ 1+3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -21 \\ -30 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -7 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|-14+10-8\right| = 6$$

e) $$6 = V = \frac{1}{3}\cdot F_{\Delta ABC}\cdot d = \frac{1}{3}\cdot 4,5\cdot\sqrt{17}\cdot d = \frac{3\cdot\sqrt{17}}{2}\cdot d \;\Rightarrow\; d = \frac{6\cdot 2}{3\cdot\sqrt{17}} = \frac{4}{17}\cdot\sqrt{17}$$