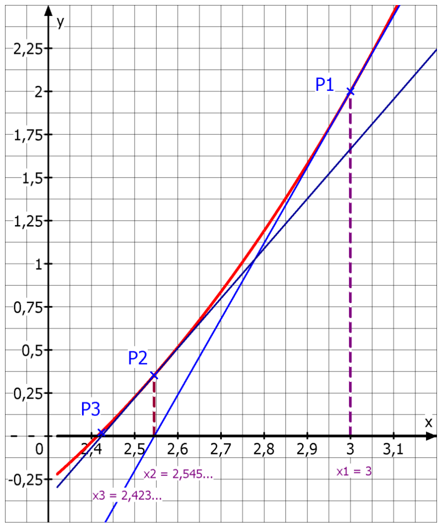
Mathematik * Q11 * Das Newton-Verfahren

Wie bestimmt man die Nullstellen einer Funktion numerisch?
Das Bild zeigt den roten Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}2 \cdot (x^3 - 5x - 2)$$

Man erkennt, dass diese Funktion f bei etwa 2,41 eine Nullstelle hat.
Mit Excel kann man diese Nullstelle schrittweise z.B. mit einer Wertetabelle ermitteln:



x	2,000	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800	2,900	3,000
f(x)	-0,800	-0,648	-0,470	-0,267	-0,035	0,225	0,515	0,837	1,190	1,578	2,000

Wegen des Vorzeichenwechsels von f(x) zwischen $x_1 = 2{,}4$ und $x_2 = 2{,}5$ liegt die Nullstelle im Intervall [2,4 ; 2,5] .
Die nächste Dezimalstelle der Nullstelle findet man analog heraus:

x	2,400	2,410	2,420	2,430	2,440	2,450	2,460	2,470	2,480	2,490	2,500
f(x)	-0,035	-0,010	0,014	0,040	0,065	0,091	0,117	0,144	0,171	0,198	0,225

Wegen des Vorzeichenwechsels von f(x) zwischen $x_1 = 2{,}41$ und $x_2 = 2{,}42$ liegt die Nullstelle im Intervall [2,41 ; 2,42].
Für jede weitere Dezimalstelle der gesuchten Nullstelle benötigt man so 10 weitere Berechnungen.

In Zeiten ohne Computer musste man Algorithmen mit weniger Rechenschritten finden.
Mit dem nach seinem Erfinder benannten Newton-Verfahren gelingt die näherungsweise Berechnung in vielen Fällen wesentlich schneller.

Newton-Verfahren

Man beginnt mit einem beliebigen Punkt $P1(x_1/f(x_1))$ des Graphen von f.
Die Tangente an den Graphen im Punkt P1 schneidet die x-Achse an der Stelle x_2 und liefert so den Punkt $P2(x_2/f(x_2))$. Die Tangente an den Graphen im Punkt P2 schneidet die x-Achse an der Stelle x_3 und liefert so den Punkt P3. Die Folge der x-Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nähert sich der gesuchten Nullstelle.

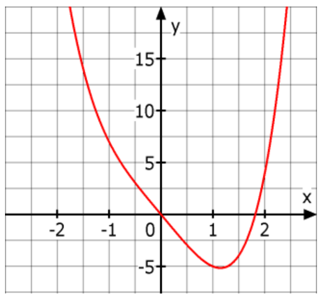
Zeigen Sie, dass sich diese Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch folgende Iteration ermitteln lässt:

x_1 beliebig gewählt: $\quad x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ und allgemein $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{mit } n \in N)}$

Aufgaben:

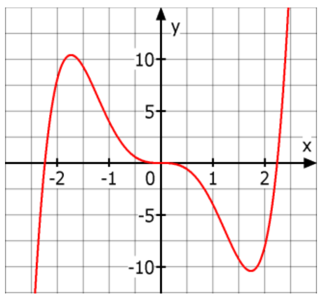
1. a) Berechnen Sie für die oben dargestellte Funktion $f(x) = 0{,}2 \cdot (x^3 - 5x - 2)$ die Werte x_2 , x_3 x_4 und x_5 mit dem Startwert $x_1 = 3$.
   b) Zeigen Sie mit exakter Rechnung, dass diese Nullstelle den Wert $x = 1 + \sqrt{2}$ besitzt.

2. a) Begründen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^4 - 6x$ neben der trivialen Nullstelle $x_o = 0$ noch genau eine weitere Nullstelle x_1 hat und berechnen Sie diese.
   b) Berechnen Sie diese zweite Nullstelle x_1 mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Starten Sie mit dem Wert $x_1 = 2$.
   c) Was erwarten Sie, wenn Sie mit dem Startwert $x_1 = 1$ beginnen. Betrachten Sie dazu das Bild des Graphen!



3. Führen Sie das Newton-Verfahren für die Funktion f mit $f(x) = x^5 - 5x^3$ durch. Verwenden Sie den Startwert $x_1 = 2$.
   Welche Nullstelle wird das Newton-Verfahren dabei liefern?
   Bestimmen Sie auch die exakten Werte der Nullstellen von f.

   Das Newton-Verfahren eignet sich natürlich auch für eine Tabellenkalkulation wie Excel.
   Erstellen Sie eine entsprechende Tabelle!



Lösungen zur Aufgabe 3 mit Hilfe von Excel

Wie hängen die Ergebnisse beim Newton-Verfahren vom Startwert x_1 ab?

Newton-Verfahren				
Startwert		f(x)		f´(x)
2		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	2	-8		20
x2	2,4	10,50624		79,488
x3	2,26782609	1,66829193		55,1085259
x4	2,23755324	0,07443596		50,2327784
x5	2,23607142	0,00017214		50,0005389
x6	2,23606798	9,2763E-10		50
x7	2,23606798	0		50

Startwert		f(x)		f´(x)
0,5		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	0,5	-0,59375		-3,4375
x2	0,32727273	-0,17151224		-1,54925155
x3	0,21656621	-0,0503094		-0,69251537
x4	0,14391888	-0,01484296		-0,30854457
x5	0,09581251	-0,00438974		-0,13727919
x6	0,06383579	-0,0012996		-0,0610421
x7	0,04254562	-0,00038493		-0,02713556
x8	0,02836032	-0,00011403		-0,01206138
x9	0,01890587	-3,3785E-05		-0,00536084
x10	0,01260361	-1,001E-05		-0,00238264
x11	0,00840232	-2,9659E-06		-0,00105896
x12	0,00560152	-8,7879E-07		-0,00047065
x13	0,00373434	-2,6038E-07		-0,00020918
x14	0,00248956	-7,715E-08		-9,2968E-05
x15	0,0016597	-2,2859E-08		-4,1319E-05
x16	0,00110647	-6,7731E-09		-1,8364E-05
x17	0,00073765	-2,0068E-09		-8,1618E-06
x18	0,00049176	-5,9462E-10		-3,6275E-06
x19	0,00032784	-1,7618E-10		-1,6122E-06
x20	0,00021856	-5,2203E-11		-7,1654E-07
x21	0,00014571	-1,5467E-11		-3,1846E-07
x22	9,7139E-05	-4,5829E-12		-1,4154E-07
x23	6,4759E-05	-1,3579E-12		-6,2906E-08
x24	4,3173E-05	-4,0234E-13		-2,7958E-08
x25	2,8782E-05	-1,1921E-13		-1,2426E-08

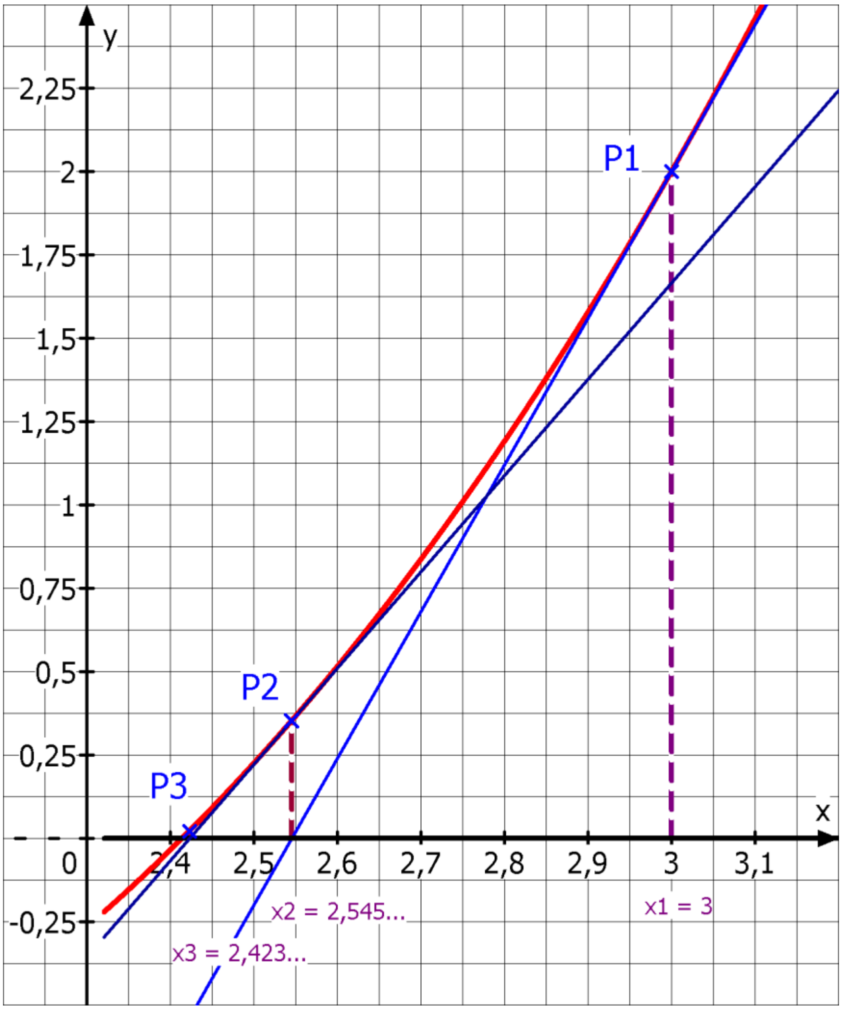
Startwert		f(x)		f´(x)
100		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	100	9995000000		499850000
x2	80,0040012	3275059144		204744966
x3	64,0082031	1073118898		83867640,1
x4	51,2128162	351612711		34354813,3
x5	40,9780725	115202670		14073415,9
x6	32,7922368	37742541,6		5765551,6
x7	26,2460215	12363846,7		2362263,93
x8	21,0121243	4049519,11		968029,969
x9	16,8288663	1325984,58		396793,459
x10	13,4871162	434001,056		162713,705
x11	10,8198482	141954,594		66769,8525
x12	8,69381996	46379,8134		27429,8381
x13	7,00296735	15125,4713		11289,7457
x14	5,66321429	4917,10253		4661,98472
x15	4,60849129	1589,32964		1936,7311
x16	3,78786645	508,041902		814,096818
x17	3,16381058	158,651036		350,824747
x18	2,71158753	46,9071143		160,020892
x19	2,41845634	12,0084564		83,3160075
x20	2,2743249	2,02993391		56,1882549
x21	2,23819753	0,10683285		50,3339399
x22	2,23607505	0,00035343		50,0011064
x23	2,23606798	3,9103E-09		50
x24	2,23606798	0		50

Startwert		f(x)		f´(x)
1,75		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	1,75	-10,3837891		0,95703125
x2	12,6	307577,814		123642,288
x3	10,1123575	100575,105		50751,4099
x4	8,13063706	32844,793		20859,2396
x5	6,556045	10702,8755		8592,41797
x6	5,31042641	3474,46499		3553,36787
x7	4,33263151	1120,0636		1480,30738
x8	3,57598893	356,120958		625,810497
x9	3,00693335	109,882848		273,132284
x10	2,60462701	31,5247318		128,357606
x11	2,3590262	7,4173761		71,3713132
x12	2,25509963	0,98024117		53,0281311
x13	2,23661432	0,0273407		50,0855571
x14	2,23606844	2,3336E-05		50,0000731
x15	2,23606798	1,7039E-11		50
x16	2,23606798	0		50

Startwert		f(x)		f´(x)
1,7		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	1,7	-10,36643		-1,5895
x2	-4,82181818	-2045,94384		2354,0474
x3	-3,95270066	-656,089979		986,164639
x4	-3,28740609	-206,307396		421,854858
x5	-2,79835781	-62,0325883		189,145549
x6	-2,47039562	-16,6271474		94,6813481
x7	-2,29478397	-3,21485738		59,6650407
x8	-2,24090221	-0,24354578		50,7598373
x9	-2,23610421	-0,00181174		50,0056715
x10	-2,23606798	-1,0274E-07		50,0000003
x11	-2,23606798	0		50

Startwert		f(x)		f´(x)
1,65		x^5-5x^3		5x^4-15x^2
x1	1,65	-10,2308147		-3,77746875
x2	-1,05837838	4,59977043		-10,5286261
x3	-0,62149607	1,10756324		-5,04788676
x4	-0,4020848	0,31452		-2,29439337
x5	-0,26500282	0,09174416		-1,02873859
x6	-0,1758216	0,02700805		-0,45892037
x7	-0,11697032	0,00798008		-0,20429484
x8	-0,07790876	0,00236157		-0,09086241
x9	-0,05191811	0,00069935		-0,04039603
x10	-0,03460585	0,00020716		-0,0179563
x11	-0,02306872	6,1375E-05		-0,00798107
x12	-0,0153786	1,8184E-05		-0,00354724
x13	-0,01025224	5,3879E-06		-0,00157657
x14	-0,00683478	1,5964E-06		-0,0007007
x15	-0,00455651	4,73E-07		-0,00031142
x16	-0,00303767	1,4015E-07		-0,00013841
x17	-0,00202511	4,1526E-08		-6,1516E-05
x18	-0,00135007	1,2304E-08		-2,734E-05
x19	-0,00090005	3,6456E-09		-1,2151E-05
x20	-0,00060003	1,0802E-09		-5,4006E-06
x21	-0,00040002	3,2005E-10		-2,4003E-06
x22	-0,00026668	9,483E-11		-1,0668E-06
x23	-0,00017779	2,8098E-11		-4,7412E-07
x24	-0,00011852	8,3253E-12		-2,1072E-07
x25	-7,9017E-05	2,4667E-12		-9,3654E-08

Das Newton-Verfahren zum Ermitteln von Nullstellen einer Funktion



x	2,000	2,100	2,200	2,300	2,400	2,500	2,600	2,700	2,800	2,900	3,000
f(x)	-0,800	-0,648	-0,470	-0,267	-0,035	0,225	0,515	0,837	1,190	1,578	2,000

Wegen des Vorzeichenwechsels von f(x) zwischen $x_1 = 2{,}4$ und $x_2 = 2{,}5$ liegt die Nullstelle im Intervall [2,4 ; 2,5] .

x	2,400	2,410	2,420	2,430	2,440	2,450	2,460	2,470	2,480	2,490	2,500
f(x)	-0,035	-0,010	0,014	0,040	0,065	0,091	0,117	0,144	0,171	0,198	0,225