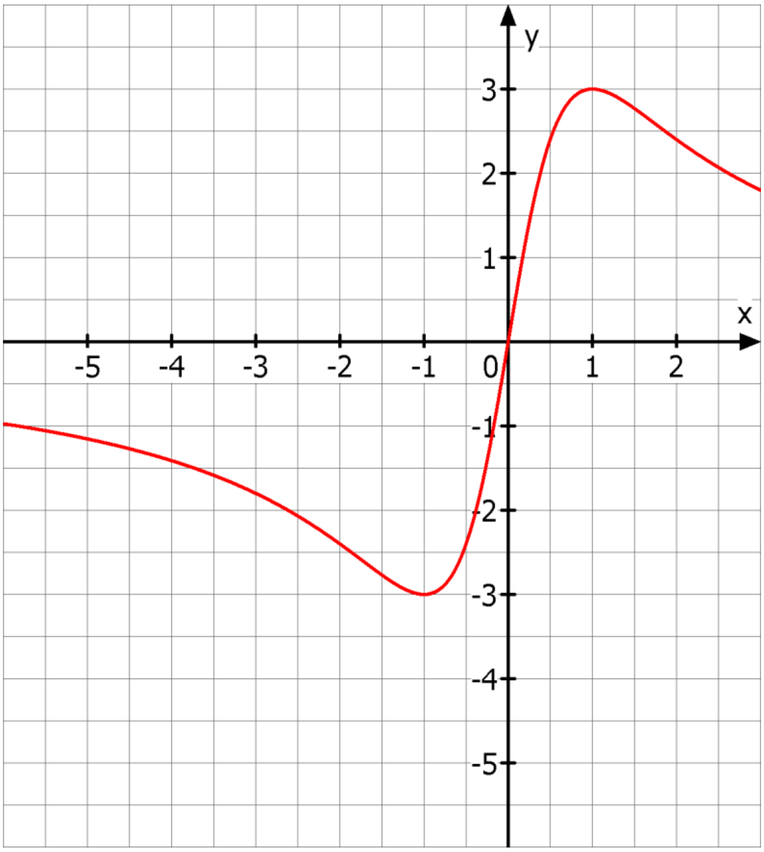
Q11 * Mathematik * Umkehrfunktionen

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$ mit $D_f = \mathbb{R}$.

   a) Bestimmen Sie alle Bereiche, in denen f umkehrbar ist und ermitteln Sie $f^{-1}(x)$ für f mit dem eingeschränkten Definitionsbereich $]-\infty\,;\,-1]$.

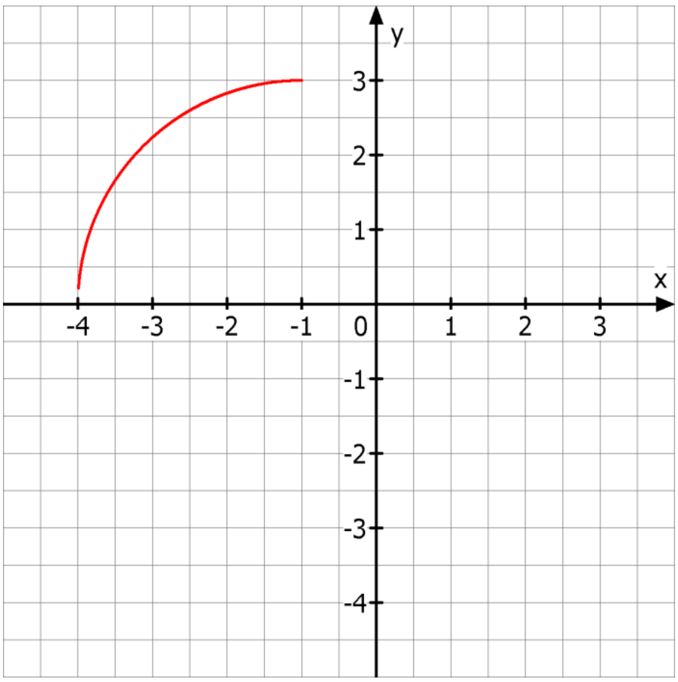
   b) Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f.
   Tragen Sie die Graphen der in a berechneten Umkehrfunktion in das Diagramm ein!



1. Zeigen Sie, dass die Funktion $g(x) = \sqrt{8 - 2x - x^2}$ mit $D_g = [-4\,;\,-1]$ umkehrbar ist.

   a) Bestimmen Sie den Term der zugehörigen Umkehrfunktion.

   b) Das Bild zeigt den Graph von g.
   Tragen Sie den Graph der zugehörigen Umkehrfunktion in das Diagramm ein.



Q11 * Mathematik * Umkehrfunktionen * Lösungen

1. a) $f'(x) = \dfrac{6(x^2+1) - 6x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6-6x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6(1-x)\cdot(1+x)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-x)\cdot(1+x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = -1\,;\, x_2 = 1$ mit $TIP(-1/-3)$ und $HOP(1/3)$

f ist streng monoton fallend in $]-\infty\,;\,-1]$ und in $[1\,;\,\infty[$

sowie streng monoton steigend in $[-1\,;\,1]$ und damit in diesen Bereichen umkehrbar.

$f_1:\; y = \dfrac{6x}{x^2+1}$ mit $D_{f_1} = [-\infty\,;\,-1]$

und $W_{f_1} = [-3\,;\,0[$

$y_{1/2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-4x^2}}{2x} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-x^2}}{x}$

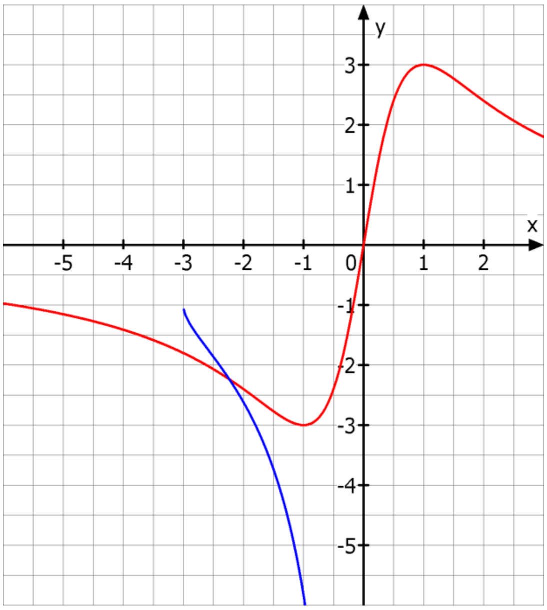
Hier gilt $f_1^{-1}(x) = \dfrac{3+\sqrt{9-x^2}}{x}$

mit $x \in D_{f_1^{-1}} = W_{f_1} = [-3\,;\,0[$

$\left[\begin{array}{l}\text{denn z.B. gilt } f_1(-3) = -1{,}8 \text{ und} \\ \dfrac{3+\sqrt{9-1{,}8^2}}{-1{,}8} = -3 \text{ und } \dfrac{3-\sqrt{9-1{,}8^2}}{-1{,}8} = -\dfrac{1}{3}\end{array}\right]$

(und $W_{f_1^{-1}} = D_{f_1} =]-\infty\,;\,-1]$)

b)



2. a) $g(x) = \sqrt{8-2x-x^2} = \sqrt{-(x+4)\cdot(x-2)}$ d.h. $D_g = [-4\,;\,-1] \subset D_{g,max} = [-4;\,2]$

$g'(x) = \dfrac{-2-2x}{2\cdot\sqrt{8-2x-x^2}} = \dfrac{-(1+x)}{\sqrt{8-2x-x^2}}$ und $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1$

$g'(x) > 0$ für $x \in]-4;\,-1]$, also ist g in D_g streng monoton steigend und damit umkehrbar.

$g:\; y = \sqrt{8-2x-x^2}$; $D_g = [-4\,;\,-1]$

$g^{-1}:\; x = \sqrt{8-2y-y^2} \;\Rightarrow$

$x^2 = 8-2y-y^2 \;\Rightarrow\; y^2 + 2y + x^2 - 8 = 0$

$y_{1/2} = \dfrac{1}{2}\cdot(-2 \pm \sqrt{4-4\cdot(x^2-8)}\,)$

$y_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-(x^2-8)} = -1 \pm \sqrt{9-x^2}$

Wegen $W_{g^{-1}} = D_g = [-4\,;\,-1]$ folgt

$g^{-1}(x) = -1 - \sqrt{9-x^2}$ mit $x \in [0;3]$

b)