Mathematik * Q11 * Umkehrfunktionen

Wichtig:
Ist eine Funktion f im Intervall J streng monoton, so ist f in diesem Intervall umkehrbar.
Die strenge Monotonie weist man meist mit Hilfe der Ableitung von f her.
(Hinweis: Strenge Monotonie ist für Umkehrbarkeit hinreichend aber nicht notwendig!)

Musteraufgabe:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1$.
Zeigen Sie, dass diese Funktion im Bereich $D_f =]-\infty\,;\,2]$ umkehrbar ist und bestimmen Sie die zugehörige Umkehrfunktion!

$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = x - 2$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$ $\quad TIP(2/f(2)) = (2/-1)$
$f'(x) < 0$ für $x < 2$ und f ist daher in $D_f =]-\infty\,;\,2]$ streng monoton fallend und umkehrbar.

$f \;:\; f(x) = y = 0{,}5x^2 - 2x + 1$ mit $D_f =]-\infty; 2]$ und $W_f = [-1\,;\,\infty[$
(Vertausche nun x und y!)
$f^{-1}:\; x = 0{,}5y^2 - 2y + 1$ mit $D_{f^{-1}} = [-1\,;\,\infty\,[$ und $W_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$

(Löse nun nach $y = f^{-1}(x)$ auf!)
$x = 0{,}5y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow x = 0{,}5\cdot(y^2 - 4y + 2^2 - 2^2) + 1 \Leftrightarrow x = 0{,}5\cdot(y-2)^2 - 2 + 1 \Leftrightarrow$
$x = 0{,}5\cdot(y-2)^2 - 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0{,}5\cdot(y-2)^2 \Leftrightarrow 2x + 2 = (y-2)^2 \Leftrightarrow$
$y - 2 = \pm\sqrt{2x+2}$ (welches Vorzeichen für $f^{-1}(x)$ benötigt wird, zeigt uns $W_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$)
$f^{-1}(x) = y = 2 \pm \sqrt{2x+2}$ und wegen $W_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$ kann nur gelten
$f^{-1}(x) = y = 2 - \sqrt{2x+2}$ mit $D_{f^{-1}} = [-1\,;\,\infty\,[$ und $W_{f^{-1}} =]-\infty; 2]$

Aufgaben

1. Zeigen Sie jeweils, dass die Funktion f im angegebenen Intervall J umkehrbar ist und bestimmen Sie dann $f^{-1}(x)$ und auch $D_{f^{-1}}$.
   Skizzieren Sie (u.U. mit Hilfe eines Funktionsplotters) die Graphen von f und f^{-1} .

   a) $f(x) = 0{,}25\cdot(x-1)^2 - 2$; $\quad J = [\,1\,;\,\infty\,[$

   b) $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 0{,}875$; $\quad J =]-\infty\,;\,1{,}5]$

   c) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 1}$; $\quad J =]-\infty\,;\,0]$

   d) $f(x) = \dfrac{3x}{2x-4}$; $\quad J =]\,2\,;\,\infty\,[$

   e) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $\quad J = [\,1\,;\,\infty\,[$

(Umkehrbesen)

2. Zeigen Sie, dass f mit $f(x) = \dfrac{1+2x}{4-2x}$ und $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ umkehrbar ist und bestimmen Sie $f^{-1}(x)$ und auch $D_{f^{-1}}$

3. Ermitteln Sie für die Funktion f mit $f(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}4x^2$ alle Intervalle in denen f umkehrbar ist!
   Bestimmen dann für das Intervall $J =]-\infty; ?]$ die zugehörige Umkehrfunktion!

Mathematik * Q11 * Umkehrfunktionen * Lösungen

1. a) $f(x) = 0{,}25\cdot(x-1)^2 - 2$; $D_f = W_{f^{-1}} = [\,1;\ \infty\,[$ und $D_{f^{-1}} = W_f = [-2;\infty\,[$

$f\,'(x) = 0{,}5\cdot(x-1) > 0$ für $x \in\ ]\,1\,;\infty\,[$ und daher ist f umkehrbar in $[\,1\,;\infty\,[$.

$f^{-1}(x) = 1 + 2\cdot\sqrt{x+2}$ mit $D_{f^{-1}} = [-2;\infty\,[$

b) $f(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 0{,}875$; $D_f = W_{f^{-1}} = \,]-\infty;1{,}5]$ und $D_{f^{-1}} = W_f = \,]-\infty\,;2]$

$f\,'(x) = -x + 1{,}5 > 0$ für $x \in\ ]-\infty\,;1{,}5\,[$ und daher ist f umkehrbar in $]-\infty\,;1{,}5\,]$.

$f^{-1}(x) = 1{,}5 - \sqrt{4-2x}$ mit $D_{f^{-1}} = \,]-\infty;2\,]$

c) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 1}$; $D_f = W_{f^{-1}} = \,]-\infty;0\,]$ und $D_{f^{-1}} = W_f = [1\,;\infty[$

$f\,'(x) = \dfrac{x}{2\cdot\sqrt{0{,}5x^2+1}} < 0$ für $x \in\ ]-\infty\,;0\,[$ und daher

ist f umkehrbar in $]-\infty\,;0\,]$.

$f^{-1}(x) = -\sqrt{2\cdot(x^2-1)}$ mit $D_{f^{-1}} = [1\,;\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{3x}{2x-4}$; $D_f = W_{f^{-1}} = \,]\,2\,;\ \infty\,[$ und $D_{f^{-1}} = W_f = \,]\,1{,}5;\infty\,[$

$f\,'(x) = \dfrac{-12}{(2x-4)^2} < 0$ für $x \in\ ]\,2\,;\infty\,[$ und daher ist f umkehrbar in $[\,2\,;\infty\,[$

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x}{2x-3}$ mit $D_{f^{-1}} = \,]\,1{,}5\,;\infty\,[$

e) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$; $D_f = W_{f^{-1}} = [\,1\,;\ \infty\,[$ und $D_{f^{-1}} = W_f = \,]\,0;1]$

$f\,'(x) = \dfrac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)} < 0$ für $x \in\ ]\,1\,;\infty\ [\ \Rightarrow$ f umkehrbar in $[\,1\,;\infty\,[$ und $W_f = \,]\,0\,;1]$

$f^{-1}(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$ mit $D_{f^{-1}} = \,]\,0;1]$

2. $f(x) = \dfrac{1+2x}{4-2x}$ und $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f\,'(x) = \dfrac{10}{(4-2x)^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1^{\mp}$ und $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} f(x) = \mp\,\infty$,

daher ist f umkehrbar in $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ mit $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$f^{-1}(x) = \dfrac{4x-1}{2x+2}$ mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

3. $f(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}4x^2$ und $f\,'(x) = 0{,}8x^3 - 0{,}8x = 0{,}8\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

f ist damit in den 4 Intervallen $J_1 = \,]-\infty;-1]$, $J_2 = [-1\,;0\,]$, $J_3 = [\,0\,;1]$, $J_2 = [1\,;\infty[$

umkehrbar. Zudem gilt $f(-1) = -0{,}2$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}2x^2\cdot(x^2-2) = +\infty$.

In $D_{f_1} = J_1 = \,]-\infty;-1]$ gilt daher $W_{f_1} = [-0{,}2\,;\infty\,[$ und wegen

$f(x) = 0{,}2x^4 - 0{,}4x^2 = 0{,}2\cdot(x^2-1)^2 - 0{,}2$ bestimmt man nun $f_1^{-1}(x)$ zu

$f_1^{-1}(x) = -\sqrt{1+\sqrt{5x+1}}$ mit $D_{f_1^{-1}} = [-0{,}2\,;\infty\,[$.