Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten

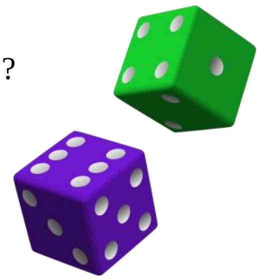
1. Josef will die abgebildeten 10 Ostereier in einer Reihe anordnen.
Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

a) keine Einschränkung besteht,
b) die beiden gelben Eier am Anfang der Reihe stehen sollen,
c) die gelben und roten Eier am Anfang der Reihe stehen sollen,
d) die gelben Eier am Anfang und die roten am Ende der Reihe stehen sollen,
e) das orange und das grüne Ei genau in der Mitte und die roten Eier am Anfang und am Ende der Reihen stehen sollen?

2. Bei einem Multiple-Choice-Test müssen 5 Fragen beantwortet werden. Zu jeder Frage gibt es drei mögliche Antworten, wobei immer nur eine davon richtig ist.
Hans hat sich nicht vorbereitet und kreuzt die Antworten zufällig an.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten folgende Ereignisse ein?

A = „Alle Antworten sind richtig.“ B = „Keine Antwort ist richtig.“
C = „Genau eine Antwort ist richtig.“ D = „Mindestens 2 Antworten sind richtig.“

3. Zwei Würfel werden geworfen.



a) Gib die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an. Wie groß ist $|\Omega|$?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die folgenden Ereignisse ein?

A = „Augensumme 6“ B = „Augendifferenz 2“
C = „Augenprodukt > 9“ D = „Augenprodukt < 10“
E = „Augensumme $\leq$ 4“ F = „Mindestens eine Zahl > 4“
G = „Augensumme mindestens 5“

4. Eine Münze wird 5mal hintereinander geworfen. Man unterscheidet „Kopf“ und „Zahl“.
a) Gib die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an. Wie groß ist $|\Omega|$?
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A = „Genau einmal Kopf“ B = „Mindestens 2mal Kopf“ C = „Höchstens 2mal Kopf“

5. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, die mit den Ziffern 0, 1, 2, …, 8 und 9 beschriftet sind.
Es werden nacheinander 2 Kugeln zufällig <u>mit Zurücklegen</u> gezogen.
a) Gib die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an. Wie groß ist $|\Omega|$?
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A = „Die Ziffern beider gezogener Kugeln sind kleiner als 5.“
B = „Die Ziffern der beiden Kugeln sind gleich.“
C = „Die Ziffern der beiden Kugeln unterscheiden sich um genau 5.“
D = „Die Ziffern der beiden Kugeln unterscheiden sich höchstens um 1.“
E = „Die Ziffernsumme der Kugeln beträgt 11.“
F = „Die Zifferndifferenz der Kugeln ist größer als 6.“

6. In einer Urne befinden sich 10 Kugeln, die mit den Ziffern 0, 1, 2, …, 8 und 9 beschriftet sind.
Es werden nacheinander 2 Kugeln zufällig <u>ohne Zurücklegen</u> gezogen.
a) Gib die Ergebnismenge Ω in Mengenschreibweise an. Wie groß ist $|\Omega|$?
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A = „Die erste Kugel ist eine 1.“
B = „Die erste Kugel ist kleiner als 4.“
C = „Die Ziffer der zweiten Kugel ist um 5 größer als die der ersten Kugel.“
D = „Die Ziffernsumme der Kugeln beträgt 11.“
E = „Die Ziffernsumme der Kugeln beträgt 12.“

Mathematik * Jahrgangsstufe 8 * Aufgaben zu Laplace-Wahrscheinlichkeiten * Lösungen

1. a) Es gibt $10! = 3628800$ Möglichkeiten.

   b) Es gibt $2! \cdot 8! = 2 \cdot 40320 = 80640$ Möglichkeiten.

   c) Es gibt $4! \cdot 6! = 24 \cdot 720 = 17280$ Möglichkeiten.

   d) Es gibt $2! \cdot 6! \cdot 2! = 2 \cdot 720 \cdot 2 = 2880$ Möglichkeiten.

   e) Es gibt $2! \cdot 2! \cdot 6! = 2 \cdot 2 \cdot 720 = 2880$ Möglichkeiten.

2. $P(A) = \frac{1^5}{3^5} = \frac{1}{243} \approx 0{,}4\%$, $\quad P(B) = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243} \approx 13{,}2\%$,

   $P(C) = \frac{5 \cdot 1 \cdot 2^4}{3^5} = \frac{80}{243} \approx 32{,}9\%$,

   $P(D) = 1 - [\,P(B) + P(C)\,] = 1 - \frac{32+80}{243} = 1 - \frac{112}{243} = \frac{131}{243} \approx 53{,}9\%$

3. a) $\Omega = \{(1/1),(1/2),....,(6/6)\}$ und $|\Omega| = 6^2 = 36$

   b) $6 = 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1 \Rightarrow P(A) = \frac{5}{36} \approx 13{,}9\%$,

   $B = \{(6/4),(5/3),(4/2),(3/1),(1/3),(2/4),(3/5),(4/6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 22{,}2\%$,

   Produkt > 9 für $2\cdot5 = 5\cdot2$; $2\cdot6 = 6\cdot2$; $3\cdot4 = 4\cdot3$; $3\cdot5 = 5\cdot3$; $3\cdot6 = 6\cdot3$; $4\cdot4$; $4\cdot5 = 5\cdot4$;

   $4\cdot6 = 6\cdot4$; $5\cdot5$; $5\cdot6 = 6\cdot5$; $6\cdot6 \Rightarrow P(C) = \frac{8\cdot2+3\cdot1}{36} = \frac{19}{36} \approx 52{,}8\%$

   $P(D) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{19}{36} = \frac{17}{36} \approx 47{,}2\%$,

   Augensumme ≤ 4 für $(1/1),(1/2),(2/1),(1/3),(3/1),(2/2) \Rightarrow P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$,

   F = „Mindestens eine Zahl > 4“ ist das Gegenereignis zu H = “Beide Zahlen ≤ 4“, also

   $P(F) = P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - \frac{4^2}{36} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\%$,

   G = „Augensumme mindestens 5“ ist das Gegenereignis zu E = „Augensumme ≤ 4“, also

   $P(G) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{6}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} \approx 83{,}3\%$

4. a) $\Omega = \{KKKKK,\ KKKKZ,\ KKKZK,......,\ ZZZZZ\}$ und $|\Omega| = 2^5 = 32$

   b) $P(A) = \frac{5}{2^5} = \frac{5}{32} \approx 15{,}6\%$, $\quad P(B) = 1 - (\frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5}) = 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \approx 81{,}3\%$,

   c) „Höchstens 2mal Kopf“ bedeutet „Keinmal Kopf“ oder „Genau einmal Kopf“ oder

   „Genau 2mal Kopf“ also $P(C) = \frac{1}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{5\cdot4:2}{2^5} = \frac{16}{32} = 50\%$

5. a) $\Omega = \{(0/1),(0/2),...,(0/9), ...,(9/9)\}$ und $|\Omega| = 10^2 = 100$

b) $P(A) = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 25\%$

$P(B) = \frac{10}{100} = 10\%$

$C = \{(0/5),(5/0),(1/6),(6/1),(2/7),(7/2),(3/8),(8/3),(4/9),(9/4)\}$

also $P(C) = \frac{10}{100} = 10\%$

D entspricht „Ziffern sind gleich“ oder „Ziffern unterscheiden sich um genau 1“
Unterscheiden um genau 1 gilt für $(0/1),(1/0),(1/2),(2/1),...(8/9),(9/8)$, das sind genau

$9 \cdot 2 = 18$ Möglichkeiten, also $P(D) = \frac{10}{100} + \frac{18}{100} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 28\%$

$E = \{(2/9),(9/2),(3/8),(8/3),(4/7),(7/4),(5/6),(6/5)\}$ also $P(E) = \frac{8}{100} = 8\%$

$F = \{(0/7),(0/8),(0/9),(7/0),(8/0),(9/0),(1/8),(1/9),(8/1),(9/1),(2/9),(9/2)\}$

also $P(F) = \frac{12}{100} = 12\%$

6. a) $\Omega = \{(0/0), (0/1),....,(9/8),(9/9)\} \setminus \{(0/0),(1/1),...,(9/9)\}$ und $|\Omega| = 10^2 - 10 = 90$

oder $|\Omega| = 10 \cdot 9 = 90$, da für die erste Ziehung 10 und für die zweite Ziehung noch 9 Möglichkeiten bestehen.

b) $P(A) = \frac{1}{10} = 10\%$

$P(B) = \frac{4}{10} = 40\%$, denn für die erste Kugel gibt es die 4 Möglichkeiten 0, 1, 2 und 3.

$C = \{(0/5),(1/6),(2/7),(3/8),(4/9)\}$ also $P(C) = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 5,6\%$

$D = \{(2/9),(9/2),(3/8),(8/3),(4/7),(7/4),(5/6),(6/5)\}$ also $P(E) = \frac{8}{90} = \frac{4}{45} \approx 8,9\%$

$E = \{(3/9),(9/3),(4/8),(8/4),(5/7),(7/5)\}$ also $P(E) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 6,7\%$