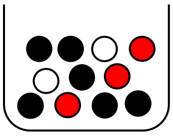
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zur Kombinatorik

Wie kann man die Aufgaben jeweils am einfachsten lösen, mit bekannten Formeln zur Kombinatorik oder mit einem Baumdiagramm?

1. In einer Urne befinden sich 6 schwarze, 3 rote und 2 weiße Kugeln.
   Es werden zwei Kugel ohne Zurücklegen gezogen.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man



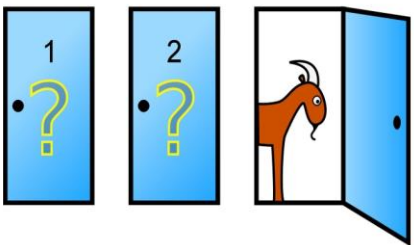
   a) zwei verschiedenfarbige Kugeln?
   b) mindestens eine schwarze Kugel?
   c) mindestens eine rote Kugel?

   Wie lauten die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten, wenn man zwei Kugeln mit Zurücklegen zieht?

2. Peter wirft einen Würfel 10mal.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die folgenden Ereignisse ein?

   A = „Keine 6"
   B = „Genau eine 6"
   C = „Mindestens 2mal eine 6"
   D = „Nur gerade Zahlen"
   E = „Genau 5mal eine 6"
   F = „5mal eine 6 und jede andere Zahl genau einmal"

3. In einer Fernsehshow befinden sich hinter drei verschlossenen Türen ein Auto und zwei Ziegen.
   Ein Fernsehgast G soll erraten, hinter welcher Tür das Auto steht. Tippt G richtig, so erhält er das Auto.
   G wählt zunächst eine Tür aus. Der Moderator öffnet daraufhin eine andere Tür, hinter der eine Ziege steht. Nun kann G entscheiden, ob er bei seiner Türwahl bleibt oder die andere noch verschlossene Tür aussucht.
   Wie sollte G sich entscheiden, um seine Trefferquote zu optimieren?



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zur Kombinatorik * Lösungen

1. Hier ist ein Baumdiagramm sinnvoll.
   Zunächst ohne Zurücklegen:

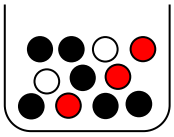
   a) P("verschiedene Farben") = 1 − P("gleiche Farbe") =

   $$1-\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10}-\frac{3}{11}\cdot\frac{2}{10}-\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}=\frac{110-30-6-2}{110}=\frac{72}{110}=\frac{36}{55}\approx 65{,}5\%$$

   b) $P(\text{"mindestens eine schwarze Kugel"})=\frac{6}{11}\cdot 1+\frac{3}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{11}\cdot\frac{6}{10}=\frac{9}{11}\approx 81.8\%$

   c) $P(\text{"mindestens eine rote Kugel"})=\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{10}+\frac{3}{11}\cdot 1+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{27}{55}\approx 49{,}0\%$

   Und mit Zurücklegen:

   a) P("verschiedene Farben") = 1 − P("gleiche Farbe") =

   $$1-\frac{6}{11}\cdot\frac{6}{11}-\frac{3}{11}\cdot\frac{3}{11}-\frac{2}{11}\cdot\frac{2}{11}=\frac{121-36-9-4}{121}=\frac{72}{121}\approx 59{,}5\%$$

   b) $P(\text{"mindestens eine schwarze Kugel"})=\frac{6}{11}\cdot 1+\frac{3}{11}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{11}\cdot\frac{6}{11}=\frac{96}{121}\approx 79{,}3\%$

   c) $P(\text{"mindestens eine rote Kugel"})=\frac{6}{11}\cdot\frac{3}{11}+\frac{3}{11}\cdot 1+\frac{2}{11}\cdot\frac{3}{11}=\frac{57}{121}\approx 47{,}1\%$

2. Hier sind die Formeln der Kombinatorik sinnvoll.
   Die Ergebnisse lassen sich als 10er-Tupel angeben.

   $|\Omega| = 6^{10}$

   a) $|A| = |\text{"keine 6"}| = 5^{10} \Rightarrow P(A)=\frac{5^{10}}{6^{10}}\approx 16{,}2\%$

   b) $|B| = |\text{"genau eine 6"}| = \binom{10}{1}\cdot 5^9 = 10\cdot 5^9 \Rightarrow P(B)=\frac{10\cdot 5^9}{6^{10}}\approx 32{,}3\%$

   c) $|C| = |\text{"mindestens 2mal 6"}| = |\Omega|-|A|-|B| \Rightarrow P(C)=1-P(A)-P(B)\approx 51{,}5\%$

   d) $|D| = |\text{"nur gerade Zahlen"}| = 3^{10} \Rightarrow P(D)=\frac{3^{10}}{6^{10}}\approx 0{,}098\%$

   e) $|E| = |\text{"genau 5mal 6"}| = \binom{10}{5}\cdot 5^5 = 252\cdot 5^5 \Rightarrow P(E)=\frac{252\cdot 5^5}{6^{10}}\approx 1{,}3\%$

   f) $|F| = |\text{"genau 5mal 6, jede andere Zahl einmal"}| = \binom{10}{5}\cdot 5! = 252\cdot 5! \Rightarrow$

   $$P(F)=\frac{252\cdot 5!}{6^{10}}\approx 0{,}050\%$$

3. Der Gast G sollte sich um entscheiden.
   Bleibt er bei seiner Wahl, so erhält er das Auto nur in 33,3% der Fälle.
   Wählt er aber die andere, verschlossene Tür, so steigert er die Aussicht auf den Autogewinn insgesamt auf 66,7%.