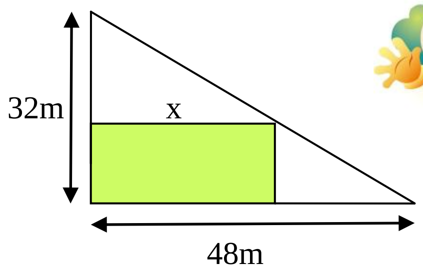
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Extremwertaufgaben * Blatt 2

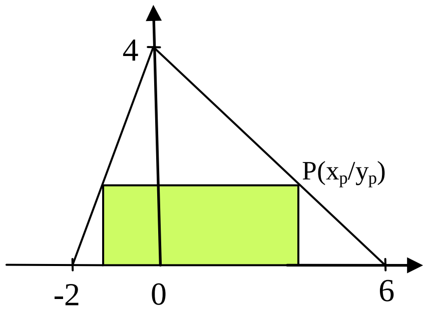
1. Die Gemeinde Haar weist neues Bauland aus. Herr Meier hat die dreieckige Fläche gekauft, muss aber nun – wie vorgeschrieben – ein rechteckiges Baugrundstück festlegen.

   Wie sollte sich Herr Meier entscheiden, wenn er ein möglichst großes Baugrundstück haben will?



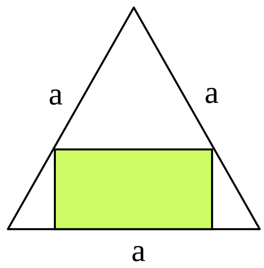
2. Dem abgebildeten Dreieck soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden.

   Wie muss man den Eckpunkt P des Rechtecks dafür festlegen und wie groß ist dann dieser maximale Flächeninhalt?



3. Einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge a soll in der abgebildeten Art und Weise ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden.

   Wie viel Prozent der Dreiecksfläche besitzt dieses Rechteck dann?



4. Eine Fabrik verkauft pro Monat n Stück Maschinen zu einem Preis p .
   Die Anzahl n der pro Monat verkauften Maschinen und der Stückpreis p hängen wie folgt zusammen:

   $$n = n(p) = 1200 - 3 \cdot \frac{p}{€}$$

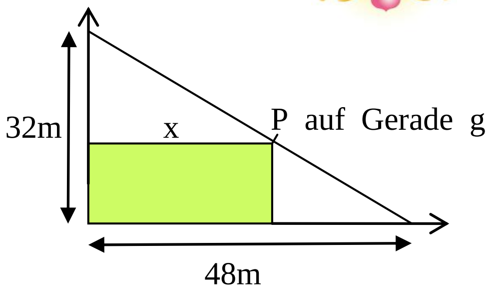
   a) Versuche eine Erklärung zu geben, warum die Anzahl der verkauften Maschinen in der angegebenen Art vom Stückpreis abhängen kann.
   b) Bestimme den monatlichen Umsatz in Abhängigkeit vom Stückpreis p.
      Für welchen Preis p ist der Umsatz maximal?

5. Welcher Punkt P auf der Geraden g mit der Funktionsgleichung $f(x) = x + 1$ hat vom Punkt T(3/-1) minimalen Abstand. Wie groß ist dieser minimale Abstand?
   Fertige zunächst eine Skizze an!

6. Welcher Punkt P auf der Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$ hat vom Punkt T(0/3,5) minimalen Abstand. Wie groß ist dieser minimale Abstand?
   Fertige zunächst eine Skizze an!

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Extremwertaufgaben * Blatt 2 * Lösungen

1. Geradengleichung für g



$$g(x) = 32 - \frac{32}{48}\cdot x = 32 - \frac{2}{3}\cdot x \quad (1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{m})$$

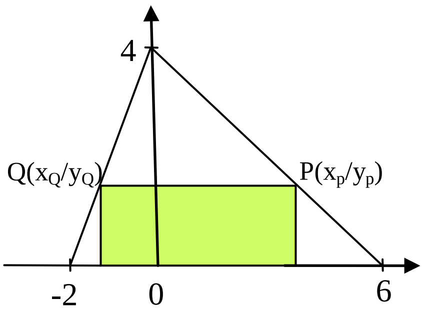
$$P(x_P\,/\,32-\frac{2}{3}\cdot x_P) \quad \text{und}$$

$$F = F(x_P) = x_P\cdot g(x_P) = x_P\cdot(32-\frac{2}{3}\cdot x_P) = -\frac{2}{3}\cdot {x_P}^2 + 32x_P$$

$$F = -\frac{2}{3}\cdot({x_P}^2 - 48x_P + 24^2) + \frac{2\cdot 24^2}{3} = -\frac{2}{3}\cdot(x_P - 24)^2 + 384$$

Für $P(24/16)$ ergibt sich der maximale Flächeninhalt des Baugrunds von $384\ \text{m}^2$.

2. Geradengleichungen:



$$g(x) = 4 - \frac{2}{3}\cdot x \quad \text{und} \quad h(x) = 4 + 2\cdot x$$

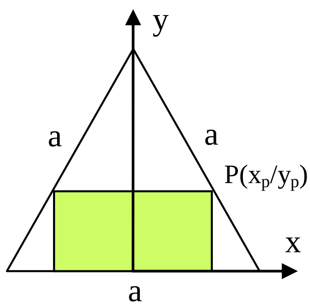
$$P(x_P\,/\,4-\frac{2}{3}\cdot x_P) \quad \text{und} \quad Q(-\frac{1}{3}x_P\,/\,4-\frac{2}{3}\cdot x_P)$$

$$F(x_P) = (x_P - x_Q)\cdot g(x_P) = \frac{4}{3}x_P\cdot(4-\frac{2}{3}\cdot x_P) =$$

$$-\frac{8}{9}\cdot {x_P}^2 + \frac{16}{3}x_P = -\frac{8}{9}\cdot({x_P}^2 - 6x_P + 3^2) + \frac{8\cdot 3^2}{9} = -\frac{8}{9}\cdot(x_P - 3)^2 + 8$$

Für $P(3/2)$ ergibt sich der maximale Flächeninhalt von 8.

3. Geradengleichungen:



$$g(x) = t - m\cdot x \quad \text{und} \quad h(x) = t + m\cdot x$$

$$(\text{hier } t = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a \quad \text{und} \quad m = \sqrt{3})$$

$$F = 2\cdot x_P\cdot y_P = 2\cdot x_P\cdot(t - m\cdot x_P) = -2m\cdot {x_P}^2 + 2t\cdot x_P =$$

$$-2m\cdot({x_P}^2 - \frac{t}{m}\cdot x_P + \frac{t^2}{4m^2}) + \frac{2m\cdot t^2}{4m^2} = -2m\cdot(x_P - \frac{t}{2m})^2 + \frac{t^2}{2m} =$$

$$-2\sqrt{3}\cdot(x_P - \frac{a}{4})^2 + \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot a^2$$

Der maximale Flächeninhalt beträgt also $\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot a^2$.

4. a) Je höher der Preis, umso geringer die Anzahl der pro Monat verkauften Maschinen.

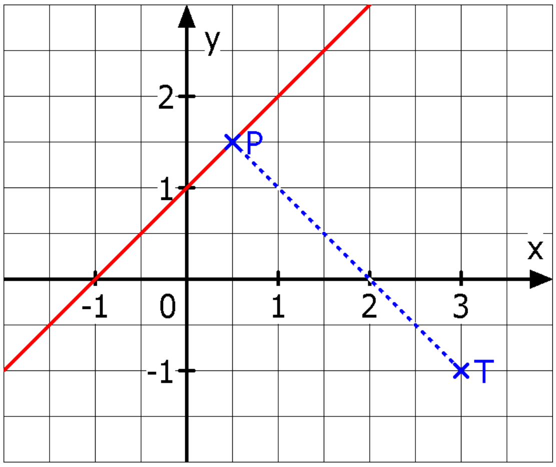
b) $n = n(p) = 1200 - 3\cdot\frac{p}{€}$; monatlicher Umsatz

$$U = n\cdot p = (1200 - 3\cdot\frac{p}{€})\cdot p = -\frac{3}{€}\cdot p^2 + 1200p =$$

$$-\frac{3}{€}\cdot(p^2 - 400€\,p + (200€)^2) + 3\cdot 200^2€ = -\frac{3}{€}\cdot(p - 200€)^2 + 120000\,€$$

Bei einem Stückpreis von 200€ ist der monatliche Umsatz mit 120000 € maximal.

5. $P(x_P / x_P + 1)$ und $T(3/-1)$ $\Rightarrow$



$d = d(x_p) = \sqrt{(x_P - 3)^2 + (x_P + 1 - (-1))^2} =$

$\sqrt{(x_P - 3)^2 + (x_P + 2)^2} =$

$\sqrt{x_P{}^2 - 6x_P + 9 + x_P{}^2 + 4x_P + 4} =$

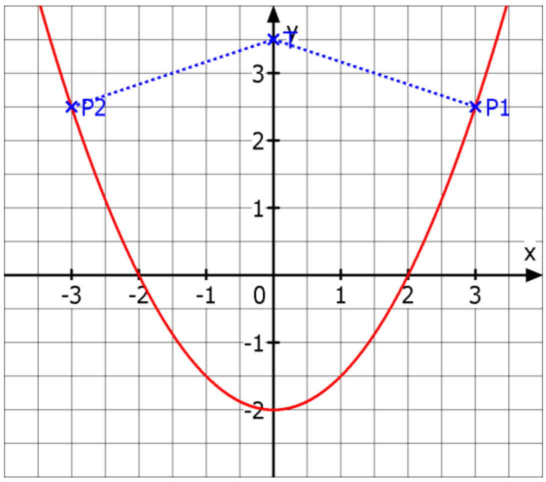
$\sqrt{2x_P{}^2 - 2x_P + 13} =$

$\sqrt{2(x_P{}^2 - x_P + 0,5^2) - 2 \cdot 0,5^2 + 13} =$

$\sqrt{2(x_P - 0,5)^2 + 12,5}$

Der Abstand ist für $P(0,5/1,5)$ minimal und hat den Wert $\sqrt{12,5} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2}$.

6. $P(x_P / 0,5x_P{}^2 - 2)$ und $T(0/3,5)$ $\Rightarrow$



$d = d(x_p) = \sqrt{x_P{}^2 + (0,5x_P{}^2 - 2 - 3,5)^2} =$

$\sqrt{x_P{}^2 + 0,25x_P{}^4 - 5,5x_P{}^2 + 5,5^2} =$

$\sqrt{0,25x_P{}^4 - 4,5x_P{}^2 + 30,25} =$

$\sqrt{0,25(x_P{}^4 - 18x_P{}^2 + 9^2) - 0,25 \cdot 9^2 + 30,25} =$

$\sqrt{0,25(x_P{}^2 - 9)^2 + 10}$

Für $x_P{}^2 - 9$, d.h. $x_{P_{1/2}} = \pm 3$
ist der gesuchte Abstand minimal und
beträgt $\sqrt{10}$.