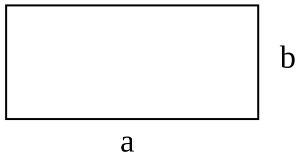
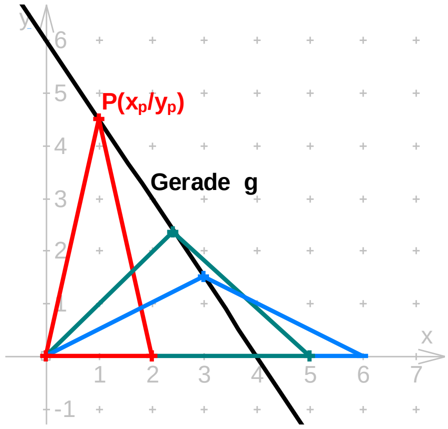
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Extremwertaufgaben

1. Ein Rechteck hat den Umfang $u = 40cm$. Bestimme die Seitenlängen a und b des Rechtecks so, dass der Flächeninhalt maximal wird.

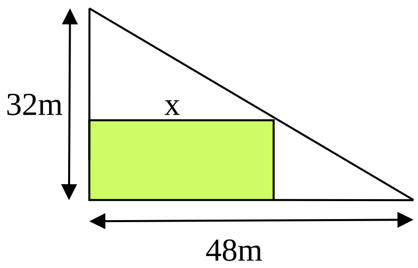


2. Das Bild zeigt eine Gerade g.
   a) Bestimme die Gleichung der Geraden g.
   b) Stelle die Koordinaten eines Punktes $P(x_p/y_p)$ auf dieser Geraden nur in Abhängigkeit von x_p dar.
   c) P ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit einer Ecke im Ursprung (0/0). Zusätzlich soll gelten $0 < x_p < 4$.
   Für welches P ist der Flächeninhalt des zugehörigen gleichschenkligen Dreiecks maximal. Bestimme diesen maximalen Flächeninhalt.



3. Die Gemeinde Haar weist neues Bauland aus. Herr Meier hat die dreieckige Fläche gekauft, muss aber nun – wie vorgeschrieben – ein rechteckiges Baugrundstück festlegen.

   Wie sollte sich Herr Meier entscheiden, wenn er ein möglichst großes Baugrundstück haben will?



4. Gegeben sind die beiden Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = 4 - x^2$ und $g(x) = (x-2)^2 - 6$.
   a) Zeichne die beiden Graphen sauber in ein Koordinatensystem.
   b) Berechne die Schnittpunkte der beiden Parabeln. (Ergebnis: $S_1(-1/3)$ und $S_2(3/-5)$)
   c) Zeichnet man im Bereich $-1 < x < 3$ wie bei Aufgabe 3) senkrechte Verbindungsstrecken von der oberen zur unteren Parabel, so haben diese Strecken wieder unterschiedliche Längen.
   Bestimme die Strecke mit der größten Länge! Zeichne diese Strecke in dein Bild ein!

5. Welcher Punkt P der Geraden g mit der Gleichung $f(x) = 0,5x + 1$ hat vom Punkt A(5/1) den kleinsten Abstand. Bestimme diesen Abstand rechnerisch! Zeige mit einer sauberen Zeichnung, dass P der Fußpunkt des Lotes von A auf die Gerade g ist.

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Extremwertaufgaben * Lösungen

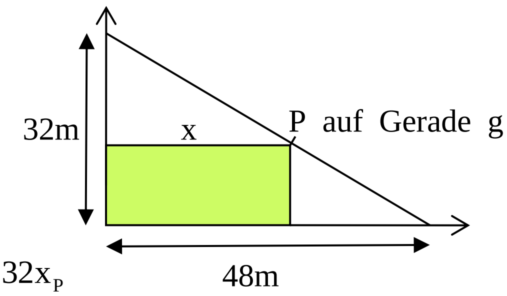
1. $F = a \cdot b = a(20cm - a)$ hat den größten Wert für $a = b = 10cm$.
   Der maximale Flächeninhalt beträgt also $100cm^2$.

2. a) $y = -1{,}5x + 6$

   b) $P(x_P \,/\, 6 - 1{,}5x_P)$

   c) $F = \frac{1}{2} \cdot 2x_P \cdot y_P = x_P \cdot (6 - 1{,}5x_P)$ hat den größten Wert für $x_P = 2$.
   Für $P(2/3)$ hat die Dreiecksfläche den maximalen Wert $F_{max} = 6$.

3. Geradengleichung für g



$$g(x) = 32 - \frac{32}{48} \cdot x = 32 - \frac{2}{3} \cdot x \quad (1LE \mathrel{\hat{=}} 1m)$$

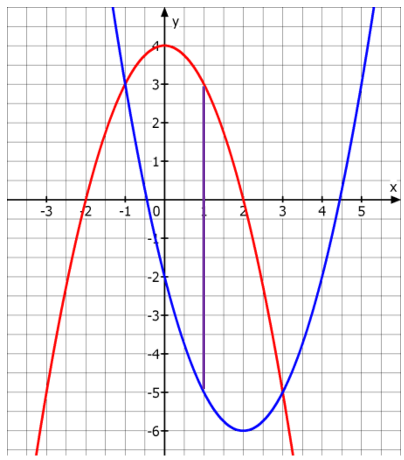
$P(x_P \,/\, 32 - \frac{2}{3} \cdot x_P)$ und

$$F = F(x_P) = x_P \cdot g(x_P) = x_P \cdot (32 - \frac{2}{3} \cdot x_P) = -\frac{2}{3} \cdot x_P{}^2 + 32x_P$$

$$F = -\frac{2}{3} \cdot (x_P{}^2 - 48x_P + 24^2) + \frac{2 \cdot 24^2}{3} = -\frac{2}{3} \cdot (x_P - 24)^2 + 384$$

Für $P(24/16)$ ergibt sich der maximale Flächeninhalt des Baugrunds von $384\ m^2$.

4. a)



   b) Schnittpunkte aus $f(x) = g(x)$ ermitteln!

   c) Streckenlänge d:

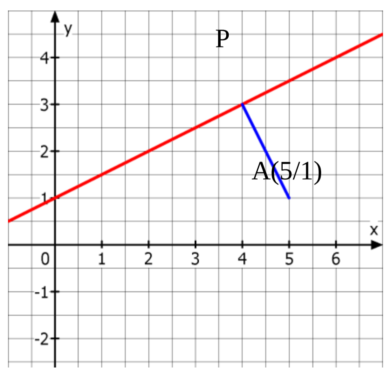
   $d = d(x_P) = f(x_P) - g(x_P) =$

   $4 - x^2 - (x^2 - 4x - 2) = -2(x-3)(x+1) =$

   $-2(x-1)^2 + 8$

   Die maximale Streckenlänge liegt bei $x_P = 1$
   und es gilt $d_{max} = d(1) = 8$.

5. $P(x_P \,/\, 0{,}5x_P + 1)$ und $A(5/1)$



$d = \overline{PA} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - x_A)^2} =$

$\sqrt{(x_P - 5)^2 + (0{,}5x_P + 1 - 1)^2} =$

$\sqrt{x_P{}^2 - 10x_P + 25 + 0{,}25x_P{}^2} =$

$\sqrt{1{,}25x_P{}^2 - 10x_P + 25}$ ist dann minimal, wenn

$d^2 = 1{,}25x_P{}^2 - 10x_P + 25$ minimal ist.

Und $d^2 = 1{,}25x_P{}^2 - 10x_P + 25 = 1{,}25(x_P - 4)^2 + 5$

ist für $x_P = 4$ minimal;

also $d_{min} = \sqrt{1{,}25(4-4)^2 + 5} = \sqrt{5}$