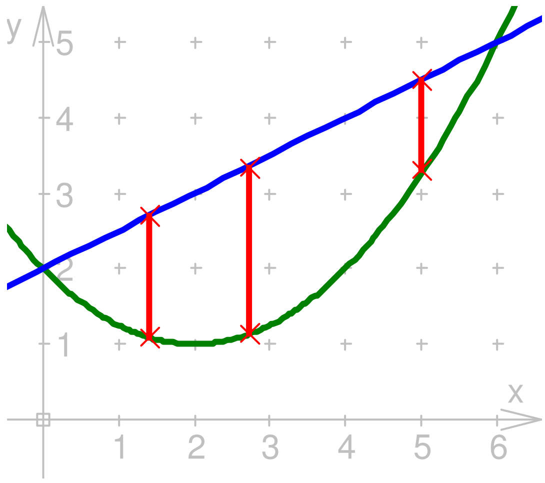
Mathematik * Jahrgangsstufe 9
Quadratische Funktionen und Lineare Gleichungssysteme

1. Die Gerade und die Parabel schneiden sich in den Punkten (0/2) und (6/5).

   a) Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden und der Parabel.

   b) Im Bereich $0 < x < 6$ werden senkrecht liegende Strecken von der Geraden zur Parabel eingetragen. Bestimme unter all diesen Strecken die längste.



2. Finde jeweils die Funktionsgleichung der Parabel, die durch die drei Punkte A, B und C verläuft. Gib die Funktionsgleichung auch in der Scheitelform an!

   a) A(-2/-1), B(0/-1), C(1/2) b) A(-2/-3), B(1/1,5), C(2/5)

   c) A(-1/-1), B(0/5), C(4/-11) d) A(1/25), B(3/1), C(4/-5)

3. Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden.

   a) $f(x) = 0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}4$ und $g(x) = 2x$

   b) $f(x) = -0{,}5(x+1)^2 + 4$ und $g(x) = -2x + 2$

   c) $f(x) = 2(x+1)\cdot(x-3)$ und $g(x) = -6x - 2$

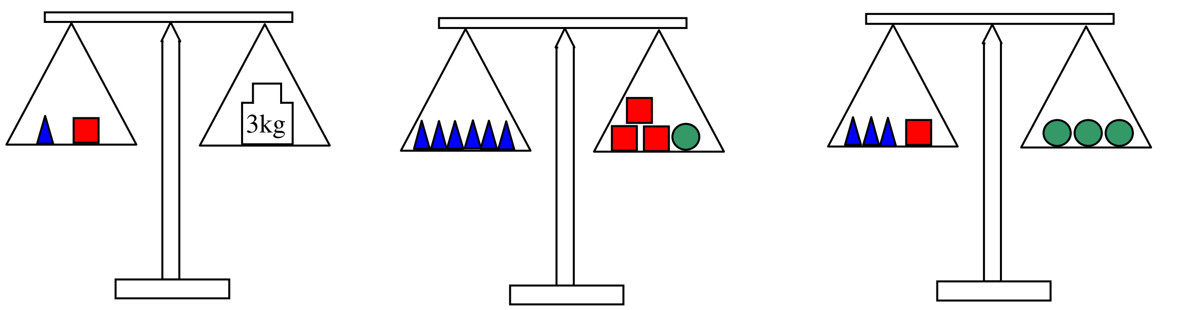
4. Bestimme m, t bzw. b so, dass sich die Parabel und die Gerade berühren, das heißt nur genau einen gemeinsamen Punkt haben. Bestimme auch den Berührpunkt!

   a) $f(x) = 0{,}25x^2 + x - 2$ und $g(x) = m\cdot x - 3$

   b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ und $g(x) = -2x + t$

   c) $f(x) = x^2 + bx + 1$ und $g(x) = -x - 3$

5. Bestimme die Masse eines roten Würfels, einer grünen Kugel und einer blauen Pyramide.



Mathematik * Jahrgangsstufe 9
Quadratische Funktionen und Lineare Gleichungssysteme * Lösungen

1. a) Gerade: $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$ Parabel: $f(x) = \frac{1}{4}\cdot(x-2)^2 + 1 = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

b) Streckenlänge $s(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{2}x + 2 - \frac{1}{4}x^2 + x - 2 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x =$

$-\frac{1}{4}(x^2 - 6x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{9}{4}$

also $s_{max} = s(3) = \frac{9}{4} = 2{,}25 = \overline{AB}$ mit $A(3/3{,}5) \in$ Gerade und $B(3{,}1{,}25) \in$ Parabel

2. Setze jeweils in den allgemeinen Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ für die Parabel die drei Punkte A, B und C ein.

a)
(1) $-1 = 4a - 2b + c$ (1) $0 = 4a - 2b \Rightarrow b = 2a$
(2) $-1 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -1$
(3) $2 = a + b + c$ (3) $3 = a + b \Rightarrow b = 3 - a$
$\Rightarrow 2a = 3 - a \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1,\ b = 2$

$f(x) = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$

b)
(1) $-3 = 4a - 2b + c$ (1) $-4{,}5 = 3a - 3b \Rightarrow b = a + 1{,}5$
(2) $1{,}5 = a + b + c \Rightarrow c = 1{,}5 - a - b$
(3) $5 = 4a + 2b + c$ (3) $3{,}5 = 3a + b$

$\Rightarrow 3{,}5 = 3a + a + 1{,}5 \Rightarrow a = 0{,}5$ und $b = 2$ und $c = -1$

$f(x) = 0{,}5x^2 + 2x - 1 = 0{,}5\cdot(x+2)^2 - 3$

c)
(1) $-1 = a - b + c$ (1) $-6 = a - b \Rightarrow b = a + 6$
(2) $5 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 5$
(3) $-11 = 16a + 4b + c$ (3) $-16 = 16a + 4b \Rightarrow -4 = 4a + b$

$\Rightarrow -4 = 4a + a + 6 \Rightarrow a = -2$ und $b = 4$ und $c = 5$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 5 = -2\cdot(x-1)^2 + 7$

d)
(1) $25 = a + b + c \Rightarrow c = 25 - a - b$
(2) $1 = 9a + 3b + c$ (2) $-24 = 8a + 2b \Rightarrow b = -12 - 4a$
(3) $-5 = 16a + 4b + c$ (3) $-30 = 15a + 3b \Rightarrow b = -10 - 5a$

$\Rightarrow 12 + 4a = 10 + 5a \Rightarrow a = 2$ und $b = -20$ und $c = 43$

$f(x) = 2x^2 - 20x + 43 = 2\cdot(x-5)^2 - 7$

3. a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 0{,}4x^2 - 0{,}8x + 2{,}4 = 2x \Leftrightarrow 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2{,}4 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x-6) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 6$ also $S_1(1/2)$ und $S_2(6/12)$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -0{,}5x^2 - x + 3{,}5 = -2x + 2 \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + x + 1{,}5 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -1$ also $S_1(3/-4)$; $S_2(-1/4)$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = -6x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 1$ also $S_1(-2/10)$; $S_2(1/-8)$

4. a) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 0,25x^2 + x - 2 = m \cdot x - 3 \;\Leftrightarrow\; 0,25x^2 + (1-m)\cdot x + 1 = 0$

Diese Gleichung hat dann genau eine Lösung, wenn $D = 0$ gilt:

$D = (1-m)^2 - 4\cdot 0,25 \cdot 1 = (1-m)^2 - 1$ also $D = 0 \Leftrightarrow (1-m)^2 = 1 \Leftrightarrow 1-m = \pm 1$

$m_1 = 0$ und $m_2 = 2$

1. Fall $m_1 = 0$

$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 0,25x^2 + (1-0)\cdot x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 4x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$

$(x+2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$ und $f(-2) = g(-2) = -3$

Im Fall $m_1 = 0$ berühren sich Gerade und Parabel also im Punkt B(-2/-3).

2. Fall $m_1 = 2$

$f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; 0,25x^2 + (1-2)\cdot x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$ und $f(2) = g(2) = 1$

Im Fall $m_1 = 2$ berühren sich Gerade und Parabel also im Punkt B(2/1).

b) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 2x - 3 = -2x + t \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - 4x + (t+3) = 0$

$D = 4^2 - 4\cdot(t+3)\cdot 1 = 16 - 4t - 12 = 4 - 4t$ also $D = 0 \Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$0 = x^2 - 4x + (1+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - 4x + 4 \;\Leftrightarrow\; 0 = (x-2)^2 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

und f(2) = g(2) = -3, d.h. der Berührpunkt lautet B(2/-3).

c) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; x^2 + bx + 1 = -x - 3 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (b+1)x + 4 = 0$

$D = (b+1)^2 - 4\cdot 1 \cdot 4 = (b+1)^2 - 16$ und damit $D = 0 \;\Leftrightarrow\; (b+1)^2 = 16 \;\Leftrightarrow$

$b + 1 = \pm 4 \;\Leftrightarrow\; b_1 = 3 \;;\; b_2 = -5$

1. Fall $b_1 = 3$

$x^2 + (3+1)x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 4x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$

und f(-2) = g(-2) = -1, d.h. der Berührpunkt lautet B(-2/-1).

2. Fall $b_2 = -5$

$x^2 + (-5+1)x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

und f(2) = g(2) = -5, d.h. der Berührpunkt lautet B(2/-5).

5. Für die gesuchten Massen führen wir Variable ein:

p = ▲ und w = ■ und k = ● und die drei Gleichgewichtsbedingungen lauten dann:

(1) $p + w = 3kg$

(2) $6p = 3w + k \;\Rightarrow\; k = 6p - 3w$

(3) $3p + w = 3k$ (3) $3p + w = 18p - 9w \Rightarrow 10w = 15p \Rightarrow w = 1,5p$

in (1) $p + w = 3kg \;\Rightarrow\; p + 1,5p = 3kg \;\Rightarrow\; p = \dfrac{3kg}{2,5} = 1,2kg$

$w = 1,5p = 1,5 \cdot 1,2kg = 1,8kg$ und $k = 6p - 3w = 6 \cdot 1,2kg - 3 \cdot 1,8kg = 1,8kg$

Die gesuchten Massen betragen für die Pyramide 1,2 kg und für den Würfel und die Kugel jeweils 1,8 kg.