Mathe-Intensivierung * Jahrgangsstufe 9 * Gleichungen

1. Löse die folgenden Gleichungen in der größtmöglichen Grundmenge.
   Kannst Du sofort erkennen, ob es sich um eine lineare oder eine quadratische Gleichung handelt?

a)	$12x - 3 = 5 - 4x$	b)	$12 \cdot (x - 3) = 5 - 4x$
c)	$x \cdot (x+1) = 0$	d)	$x \cdot (x+1) = 7$
e)	$x \cdot (x+1) = x + 5$	f)	$x \cdot (x+1) = 5x + 4$
g)	$x + 1 = \frac{1}{x}$	h)	$x = 2 + \frac{3}{x}$
i)	$2x - 3 = \frac{1}{x}$	j)	$\frac{x+3}{5-x} = 0$
k)	$\frac{x+3}{5-x} = 1$	l)	$\frac{x+3}{5-x} = x$
m)	$\frac{x+3}{5-x} = \frac{5+x}{x-3}$	n)	$\frac{x+3}{5-x} = \frac{x+4}{x+1}$
o)	$(x+2)(x+3) = 4x(x+5)$	p)	$12(x-3) + 4 = 4x(3-x) + 12$

2. Bestimme den Parameter k so, dass die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.
   Bringe dazu die quadratische Gleichung erst in die Normalform und gib dann a, b und c an.

a)	$2x^2 - 5k \cdot x = 5 \cdot (x-10)$	b)	$4 \cdot (x+1{,}5)^2 = x - k$
c)	$8x(x-1) = 4x^2 - k$	d)	$(x+k)^2 + 14 = -x(x+8)$

Mathe-Intensivierung * Jahrgangsstufe 9 * Gleichungen * Lösungen

1. a) $12x - 3 = 5 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 16x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$

b) $12 \cdot (x - 3) = 5 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 12x - 36 = 5 - 4x \quad \Leftrightarrow \quad 16x = 41 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{41}{16}$

c) $x \cdot (x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0 \ ; \ x_2 = -1$

d) $x \cdot (x+1) = 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + 29}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{28}\right)$

e) $x \cdot (x+1) = x + 5 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x = x + 5 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 5 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \pm \sqrt{5}$

f) $x \cdot (x+1) = 5x + 4 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x = 5x + 4 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 4x - 4 = 0 \ \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(4 \pm \sqrt{16+16}\right) = 2 \pm 2\sqrt{2}$

g) $x + 1 = \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow \ x^2 + x = 1 \ \Leftrightarrow \ x^2 + x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-1 \pm \sqrt{1 + 4}\right) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

h) $x = 2 + \frac{3}{x} \ \Leftrightarrow \ x^2 = 2x + 3 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-3) \cdot (x+1) = 0 \ \Leftrightarrow$

$x_1 = 3 \ ; \ x_2 = -1$

i) $2x - 3 = \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow \ 2x^2 - 3x = 1 \ \Leftrightarrow \ 2x^2 - 3x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \pm \sqrt{9 + 8}\right)$

$x_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \pm \sqrt{17}\right)$

j) $\frac{x+3}{5-x} = 0 \ \Leftrightarrow \ x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -3$

k) $\frac{x+3}{5-x} = 1 \ \Leftrightarrow \ x+3 = 5-x \ \Leftrightarrow \ 2x = 2 \ \Leftrightarrow \ x = 1$

l) $\frac{x+3}{5-x} = x \ \Leftrightarrow \ x+3 = 5x - x^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 - 4x + 3 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-3) \cdot (x-1) = 0 \ \Leftrightarrow$

$x_1 = 3 \ ; \ x_2 = 1$

m) $\frac{x+3}{5-x} = \frac{5+x}{x-3} \ \Leftrightarrow \ (x+3) \cdot (x-3) = (5+x) \cdot (5-x) \ \Leftrightarrow \ x^2 - 9 = 25 - x^2 \ \Leftrightarrow$

$2x^2 - 34 = 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 17 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \pm\sqrt{17}$

n) $\frac{x+3}{5-x} = \frac{x+4}{x+1} \ \Leftrightarrow \ (x+3) \cdot (x+1) = (x+4) \cdot (5-x) \ \Leftrightarrow \ x^2 + 4x + 3 = -x^2 + x + 20 \Leftrightarrow$

$2x^2 + 3x - 17 = 0 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot \left(-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2 \cdot 17}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(-3 \pm \sqrt{145}\right)$

o) $(x+2)(x+3) = 4x(x+5) \ \Leftrightarrow \ x^2 + 5x + 6 = 4x^2 + 20x \ \Leftrightarrow \ 0 = 3x^2 + 15x - 6 \ \Leftrightarrow$

$0 = x^2 + 5x - 2 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-5 \pm \sqrt{25 + 8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-5 \pm \sqrt{33}\right)$

p) $12(x-3) + 4 = 4x(3-x) + 12 \ \Leftrightarrow \ 12x - 36 + 4 = 12x - 4x^2 + 12 \ \Leftrightarrow$

$-32 = -4x^2 + 12 \ \Leftrightarrow \ 4x^2 = 44 \ \Leftrightarrow \ x^2 = 11 \ \Leftrightarrow \ x_{1/2} = \pm\sqrt{11}$

2. a) $2x^2 - 5k \cdot x = 5 \cdot (x-10) \iff 2x^2 - 5kx - 5x + 50 = 0 \iff 2x^2 + (-5k-5) \cdot x + 50 = 0$

$D = (-5k-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = (5k+5)^2 - 400$

genau eine Lösung bedeutet $D = 0$, also

$D = 0 \iff (5k+5)^2 - 400 = 0 \iff (5k+5)^2 = 400 \iff 5k+5 = \pm 20 \iff$

$5(k_{1/2} + 1) = \pm 20 \iff k_{1/2} + 1 = \pm 4 \iff k_{1/2} = -1 \pm 4$ also $k_1 = 3$; $k_2 = -5$

Für $k_1 = 3$ bzw. $k_2 = -5$ hat die Ausgangsgleichung also genau eine Lösung.

b) $4 \cdot (x+1,5)^2 = x - k \iff 4x^2 + 12x + 9 = x - k \iff 4x^2 + 11x + 9 + k = 0$

$D = 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (9+k)$

genau eine Lösung bedeutet $D = 0$, also

$D=0 \iff 11^2 - 4 \cdot 4 \cdot (9+k) = 0 \iff 121 = 16 \cdot (9+k) \iff \dfrac{121}{16} = 9+k \iff k = \dfrac{121}{16} - 9$

$k = -\dfrac{23}{16}$

Für $k = -\dfrac{23}{16}$ hat die Ausgangsgleichung also genau eine Lösung.

c) $8x(x-1) = 4x^2 - k \iff 8x^2 - 8x = 4x^2 - k \iff 4x^2 - 8x + k = 0$

$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot k$

genau eine Lösung bedeutet $D = 0$, also

$D = 0 \iff 64 - 16 \cdot k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{64}{16} = 4$

Für $k = 4$ hat die Ausgangsgleichung also genau eine Lösung.

d) $(x+k)^2 + 14 = -x(x+8) \iff x^2 + 2kx + k^2 + 14 = -x^2 - 8x \iff$

$2x^2 + (8+2k)x + (k^2+14) = 0$ mit

$D = (8+2k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2+14) = 64 + 32k + 4k^2 - 8k^2 - 112 = -4k^2 + 32k - 48$

$D = 0 \iff -4k^2 + 32k - 48 = 0 \iff k^2 - 8k + 12 = 0 \iff (k-2) \cdot (k-6) = 0 \iff$

$k_1 = 2$; $k_2 = 6$

Für $k_1 = 2$ bzw. $k_2 = 6$ hat die Ausgangsgleichung also genau eine Lösung.