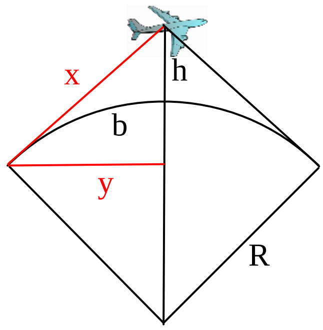
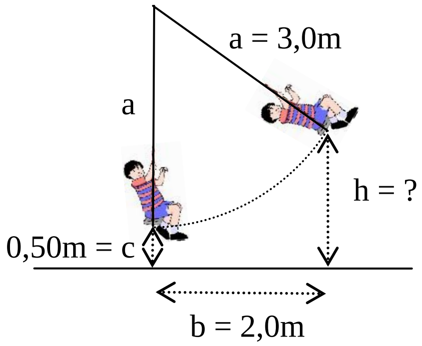
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Fünf Aufgaben zur Satzgruppe des Pythagoras

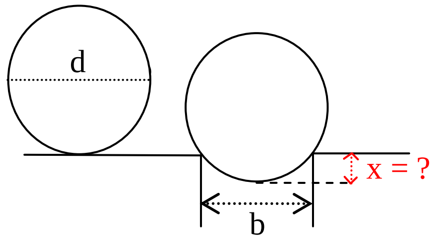
1. Ein Flugzeug fliegt in einer Höhe $h = 10$ km über dem Mittelmeer.
   Kann man in dieser Höhe die Insel Zypern (230 km lang, 90 km breit) vollständig überblicken.
   Erdradius: $R = 6370$ km



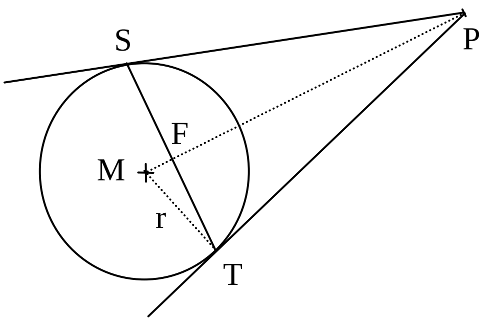
2. Klein Hansi schaukelt zur Kirchweih.
   Die Schaukel hat eine Länge von $a = 3{,}0$m.
   Welche maximale Höhe erreicht Hansi über dem Boden, wenn er sich am höchsten Punkt 2,0m vor der Ruhelage der Schaukel befindet?



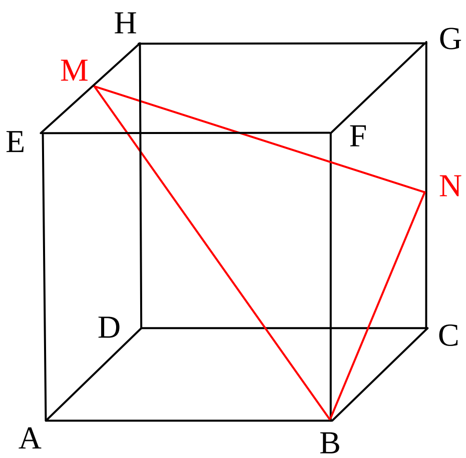
3. Eine Kugel mit dem Durchmesser $d = 10$ cm rollt in einen Spalt der Breite $b = 7{,}0$ cm.
   Wie tief sinkt die Kugel ein?
   Berechne x zunächst exakt und runde dann auf Millimeter genau.

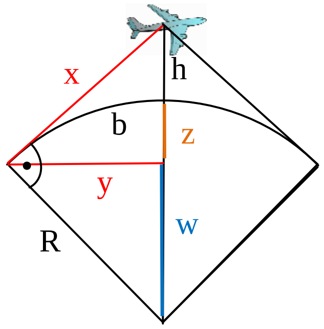


4. An einen Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = 4$ werden von einem Punkt P die zwei Tangenten gezogen.
   Es gilt $\overline{PM} = 10$.
   Die Tangenten berühren den Kreis in den Punkten S und T.
   Berechne $\overline{PT}$ und die Länge der Sehne [ST].



5. Im abgebildeten Würfel der Kantenlänge 8 halbieren die Punkt M und N die Kanten [EH] und [GC].
   a) Berechne die Streckenlängen $\overline{BN}$, $\overline{NM}$ und $\overline{MN}$.
   b) Prüfe, ob das Dreieck BNM rechtwinklig ist.





1. Gegeben: h = 10 km und Erdradius: R = 6370 km
   Insel Zypern: 230 km lang, 90 km breit.

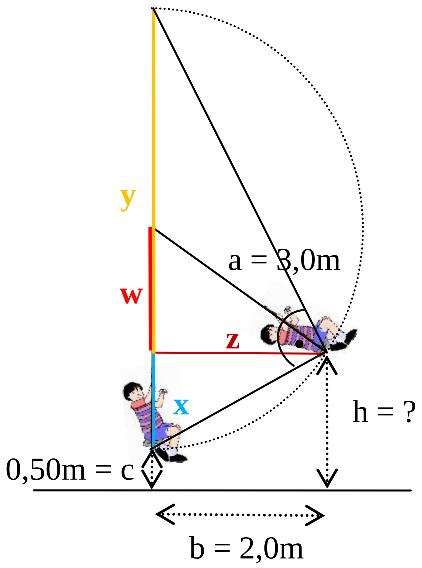
   Kathetensatz:

   $$R^2 = w\cdot(R+h) \Rightarrow w = \frac{R^2}{R+h} = \frac{6370^2}{6380}\,\text{km} =$$
   $$= 6360{,}0\ldots\text{km} \approx 6360\,\text{km}$$
   $$\text{und}\ \ z = R - w = 6370\text{km} - 6360\,\text{km} = 10\,\text{km}$$

   Höhensatz:

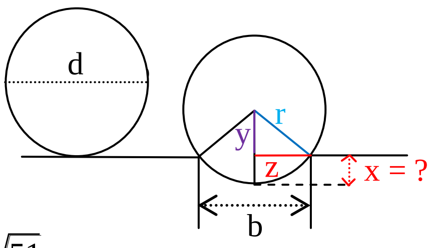
   $$y^2 = w\cdot(z+h) = 6360\cdot 20\,\text{km}^2 \Rightarrow y = \sqrt{6360\cdot 20}\ \text{km} = 356{,}9\ldots\text{km} \approx 357\,\text{km}$$

   Damit übersieht man aus einer Höhe von 10km eine Kreisfläche mit einem Radius von mehr als 357 km und Zypern ist in ganzer Größe sichtbar.



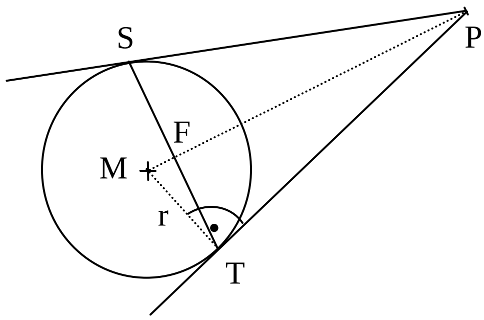
2. Es gilt:

   $$x + w = a = 3\text{m}\ \ \text{und}\ \ z = b = 2{,}0\text{m}$$
   $$w^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow w = \sqrt{9\text{m}^2 - 4\text{m}^2} = \sqrt{5}\ \text{m}$$
   $$x = a - w = (3-\sqrt{5})\,\text{m} \approx 76{,}4\,\text{cm}$$
   $$h = x + c = (3{,}5-\sqrt{5})\,\text{m} \approx 1{,}26\,\text{m}$$
   $$h = x + c = (3{,}5-\sqrt{5})\,\text{m} \approx 1{,}26\,\text{m}$$



3. Durchmesser d = 10 cm und
   Spaltbreite b = 7,0 cm. Es gilt:

   $$r = \frac{1}{2}d = 5\,\text{cm}\ \ ;\ \ x + y = r = 5\,\text{cm}$$
   $$\text{und}\ \ z = \frac{1}{2}b = 3{,}5\,\text{cm}$$
   $$y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - z^2} = \sqrt{5^2 - 3{,}5^2}\ \text{cm} = \frac{1}{2}\sqrt{51}\,\text{cm}$$
   $$x = r - y = (5 - \frac{1}{2}\sqrt{51})\,\text{cm} = 1{,}4292\ldots\text{cm} \approx 1{,}4\,\text{cm}$$



4. Gegeben: $r = 4$ und $\overline{PM} = 10$.
   Gesucht: $\overline{PT}$ und $\overline{ST}$

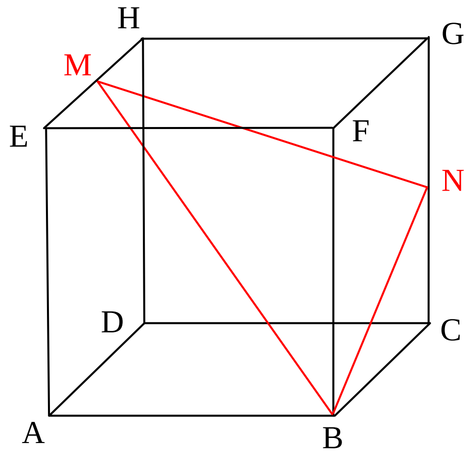
   $$r^2 + \overline{PT}^2 = \overline{MP}^2 \Rightarrow$$
   $$\overline{PT} = \sqrt{\overline{MP}^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$$
   $$r^2 = \overline{MP}\cdot\overline{MF} \Rightarrow \overline{MF} = \frac{r^2}{\overline{MP}} = \frac{16}{10} = 1{,}6$$
   $$r^2 = \overline{MF}^2 + \overline{FT}^2 \Rightarrow \overline{FT} = \sqrt{4^2 - 1{,}6^2} = \frac{4\sqrt{21}}{5}\quad \text{und}\quad \overline{ST} = 2\cdot\overline{FT} = \frac{8}{5}\sqrt{21} \approx 7{,}33$$
   $$\text{oder}\ \ \frac{1}{2}\cdot r\cdot\overline{PT} = A_{\Delta MTP} = \frac{1}{2}\cdot\overline{MP}\cdot\frac{1}{2}\overline{TS} \Rightarrow \overline{TS} = \frac{2\cdot r\cdot\overline{PT}}{\overline{MP}} = \frac{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{21}}{10} = \frac{8}{5}\sqrt{21} \approx 7{,}33$$

5. a)

Gegeben: Kantenlänge des Würfels $a = 8$

$\overline{EM} = \overline{MH} = \overline{GN} = \overline{NC} = 4$

Das Dreieck MEB und das Dreieck NHM sind rechtwinklig.



Es gilt:

$\overline{EB} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB} = 8 \cdot \sqrt{2}$ und

$\overline{MB}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EB}^2 = 4^2 + (8 \cdot \sqrt{2})^2 = 144$

also $\overline{MB} = 12$

$\overline{MN}^2 = \overline{MH}^2 + \overline{HN}^2$ mit $\overline{MH} = 4$ und

$\overline{HN}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{GN}^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \Rightarrow \overline{HN} = 4 \cdot \sqrt{5}$

$\overline{MN}^2 = 4^2 + 80 = 96 \Rightarrow \overline{MN} = 4 \cdot \sqrt{6}$

$\overline{BN}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CN}^2 = 8^2 + 4^2 = 80 \Rightarrow \overline{BN} = 4 \cdot \sqrt{5}$

Insgesamt also $\overline{MB} = 12$; $\overline{BN} = 4 \cdot \sqrt{5}$; $\overline{NM} = 4 \cdot \sqrt{6}$ und $\overline{MB}$ ist die längste Seite.

b)

$\overline{MB}^2 = 12^2 = 144$; $\overline{BN}^2 + \overline{NM}^2 = 80 + 96 = 176 > 144 = \overline{MB}^2$

Also ist der Winkel bei N im Dreieck MBN kleiner als 90^o und das Dreieck nicht rechtwinklig.