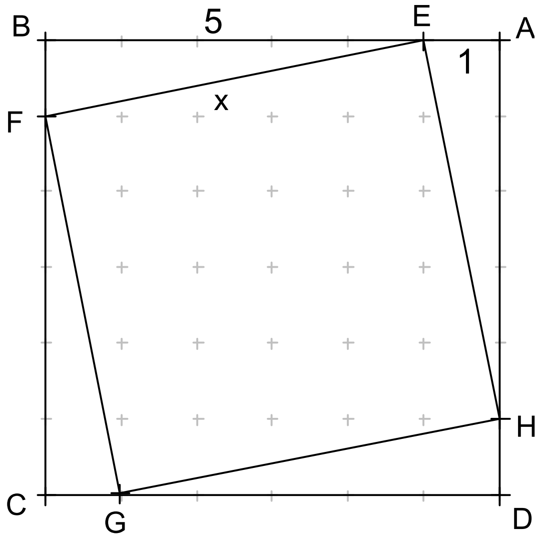
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Konstruktion irrationaler Längen

Im Quadrat ABCD mit der Kantenlänge $a = 6$ werden im Abstand 1 von den Ecken die Punkte E, F, G und H auf den Seiten eingetragen (siehe Bild).

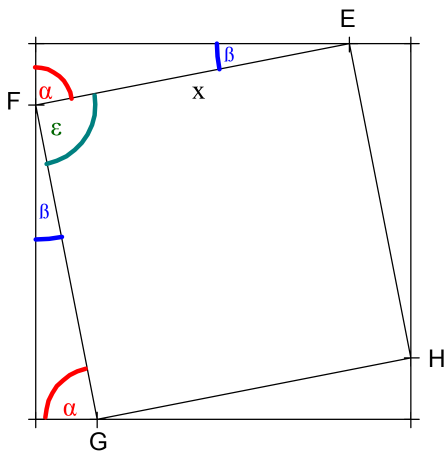
a) Begründe, dass das entstehende Viereck EFGH ebenfalls ein Quadrat ist.

b) Bestimme die Seitenlänge x in diesem Quadrat EFGH.
(Finde zuerst geometrisch heraus, welchen Wert x^2 .)
Gib den Wert von x exakt und auf 8 Stellen gerundet an.

c) Versuche nun Quadrate mit der Kantenlänge $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{17}$ zu konstruieren!



Lösung:



a) Die rechtwinkligen Dreiecke EBF, FCG, GDH und und HAE sind jeweils nach dem SWS-Satz zueinander kongruent, und damit gilt auch $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$.
Da sich α und $ß$ zu 90^o ergänzen, gilt wegen $\alpha + \varepsilon + ß = 180^o$ damit $\varepsilon = 90^o$.
Das Viereck EFGH ist also ein Quadrat.

b) Das Quadrat EFGH mit der Kantenlänge x hat den Flächeninhalt

$$x^2 = x \cdot x = 6 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 = 36 - 20 = 26$$

und daraus folgt $x = \sqrt{26}$.
Mit dem Taschenrechner ergibt sich $x = \sqrt{26} = 5{,}0990195135..... \approx 5{,}09901951$

c) Die Gleichungen

$$3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \;;\quad 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 = 10 \;;\quad 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 13 \quad \text{und} \quad 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 = 17$$

zeigen, dass man auch $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{17}$ konstruieren kann.