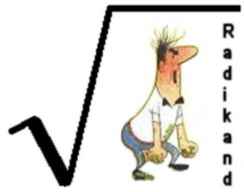
## Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratwurzeln und irrationale Zahlen




1. Berechne ohne Verwendung des Taschenrechners.

   a) $\sqrt{2{,}89}$ b) $\sqrt{1440000}$ c) $\sqrt{3^6}$

   d) $\sqrt{\frac{8}{50}}$ e) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$ f) $\sqrt{\frac{0{,}324}{62{,}5}}$

2. Vergleiche die Ergebnisse! Kannst Du einen passenden Merksatz formulieren?

   a) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2}$ und $\sqrt{3^2 + 4^2}$ und $\sqrt{5^2}$

   b) $\sqrt{13^2} - \sqrt{12^2}$ und $\sqrt{13^2 - 12^2}$

   c) $\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2}$ und $\sqrt{(3 \cdot 5)^2}$ d) $\sqrt{3^2} : \sqrt{5^2}$ und $\sqrt{(3:5)^2}$

3. a) Vergleiche $\sqrt{(-3)^2}$ und $\sqrt{3^2}$

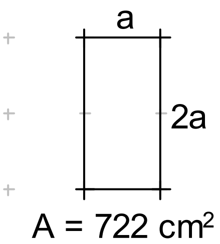
   b) Erkläre, warum man für $\sqrt{x^2}$ nicht einfach $x$ schreiben darf!

   c) Bestimme die Definitionsmenge, d.h. gib genau an, welche Werte $x$ annehmen darf!

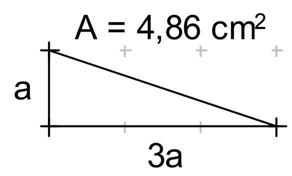
   (1) $\sqrt{2 \cdot x}$ (2) $\sqrt{-x}$ (3) $\sqrt{2-x}$ (4) $\sqrt{2+x}$ (5) $\sqrt{5-2x}$

4. Bestimme jeweils den Wert von $a$.

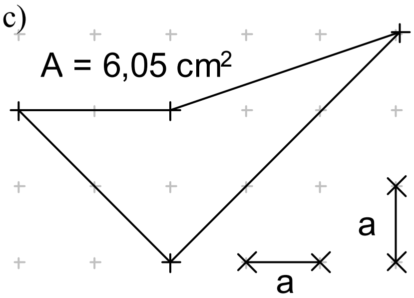
   a)




   b)




   c)




5. Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch $\frac{z}{n}$ mit $z \in Z$ und $n \in N$ und auch als Dezimalbruch (wie z.B. 4,1356) schreiben.

   a) Begründe, warum jede rationale Zahl immer als endlicher Dezimalbruch oder als unendlicher, periodischer Dezimalbruch geschrieben werden kann.

   b) Wie lang ist die Periode von $r_1 = 3 : 17$ bzw. $r_2 = 2 : 35$ höchstens?

   c) Beweise, dass $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl sein kann!

   d) Welche der drei folgenden Zahlen ist rational?
   $a = 1{,}234545454545...$ , $b = 1{,}23456789101112....$ , $c = 1{,}0100100010000100001....$

6. Zwischen welchen zwei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen liegt

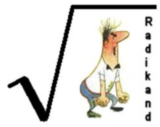
   a) $\sqrt{350}$ b) $\sqrt{32444}$ c) $\sqrt{9000005}$ d) $\sqrt{2^{20} - 5}$ ?

   Finde die Lösung zunächst ohne Taschenrechner! Prüfe dann mit dem Taschenrechner!

**Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratwurzeln und irrationale Zahlen * Lösungen**

1\. a) $\sqrt{2,89} = \sqrt{\dfrac{289}{100}} = \dfrac{17}{10} = 1,7$  b) $\sqrt{1440000} = \sqrt{144 \cdot 10000} = 12 \cdot 100 = 1200$

c) $\sqrt{3^6} = \sqrt{(3^3)^2} = 3^3 = 27$  d) $\sqrt{\dfrac{8}{50}} = \sqrt{\dfrac{8 \cdot 2}{50 \cdot 2}} = \sqrt{\dfrac{16}{100}} = \dfrac{4}{10} = 0,4$




e) $\sqrt{5\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{49}{9}} = \dfrac{7}{3}$  f) $\sqrt{\dfrac{0,324}{62,5}} = \sqrt{\dfrac{324}{62500}} = \dfrac{18}{250} = 0,072$

2 a) $\sqrt{3^2} + \sqrt{4^2} = 3 + 4 = 7$ aber $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 = \sqrt{5^2}$ also $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$

b) $\sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1$ und $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ also $\sqrt{a^2 - b^2} \neq a - b$

c) $\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 3 \cdot 5 = 15$ und $\sqrt{(3 \cdot 5)^2} = 3 \cdot 5 = 15$ also $\sqrt{(a \cdot b)^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = |a \cdot b|$

d) $\sqrt{3^2} : \sqrt{5^2} = 3 : 5$ und $\sqrt{(3:5)^2} = 3 : 5$ also $\sqrt{a^2} : \sqrt{b^2} = \sqrt{(a:b)^2} = |a : b|$

3\. a) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = \sqrt{3^2}$ also $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ $\sqrt{3^2}$

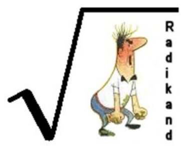
b) Für $x \geq 0$ gilt : $\sqrt{x^2} = x$ ; für $x < 0$ gilt : $\sqrt{x^2} = -x = |x|$ daher $\sqrt{x^2} = |x|$ für jedes x

c) (1) $\sqrt{2 \cdot x}$  $D = Q_o^+$ (bzw. $D = R_o^+$)  (2) $\sqrt{-x}$  $D = Q_o^-$ (bzw. $D = R_o^-$)

(3) $\sqrt{2 - x}$ ; $2 - x \geq 0$ d.h. $2 \geq x$ also $D = ]-\infty\,; 2]$

(4) $\sqrt{2 + x}$ ; $2 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ also $D = [-2\,; \infty[$

(5) $\sqrt{5 - 2x}$ ; $5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 5 \geq 2x \Leftrightarrow 2,5 \geq x$ also $D = ]-\infty\,; 2,5\,]$




4\. a) $722\,\text{cm}^2 = a \cdot 2a \Leftrightarrow a^2 = 361\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = 19\,\text{cm}$

b) $\dfrac{1}{2} \cdot a \cdot 3a = 4,86\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{2 \cdot 4,86\,\text{cm}^2}{3} \Leftrightarrow a^2 = 3,24\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = 1,8\,\text{cm}$

c) $A = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a + \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot 3a \Leftrightarrow 6,05\,\text{cm}^2 = 2a^2 + 3a^2 \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{6,05\,\text{cm}^2}{5} = 1,21\,\text{cm}^2 \Leftrightarrow a = 1,1\,\text{cm}$

5\. a) Da bei der Division z : n höchstens n – 1 verschiedene Reste ungleich Null auftreten können, hat ein unendlicher Dezimalbruch höchstens die Periodenlänge n – 1 .
Wenn bei der Division der Rest 0 auftritt, ist der Dezimalbruch endlich.

b) Der Dezimalbruch zu 3 : 17 hat höchstens die Periodenlänge 16 ,
der Dezimalbruch zu 2 : 35 hat höchstens die Periodenlänge 7 – 1 = 6, denn 35 = 5 · 7.

c) Annahme: Es gibt einen vollständig gekürzten Bruch $\dfrac{z}{n}$ mit $\left(\dfrac{z}{n}\right)^2 = 5 \Rightarrow z^2 = 5 \cdot n^2 \Rightarrow$

5 ist ein Teiler von $z^2$ $\Rightarrow$ 5 ist ein Teiler von z $\Rightarrow z = 5 \cdot z' \Rightarrow z^2 = 5 \cdot 5 \cdot (z')^2 \Rightarrow$

$5 \cdot 5 \cdot (z')^2 = z^2 = 5 \cdot n^2 \Rightarrow 5 \cdot (z')^2 = n^2 \Rightarrow$ 5 ist ein Teiler von $n^2$ $\Rightarrow$

5 ist ein Teiler von n $\Rightarrow$ 5 ist ein Teiler von z und von n $\Rightarrow$

$\dfrac{z}{n}$ ist nicht vollständig gekürzt $\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $\Rightarrow \sqrt{5}$ ist nicht rational.

6\. a) $18^2 = 324 < 350 < 361 = 19^2 \Rightarrow 18 < \sqrt{350} < 19$ ( $\sqrt{350} = 18,708...$)

b) $180^2 = 32400 < 32444 < 181^2 = 32761 \Rightarrow 180 < \sqrt{32444} < 181$ ($\sqrt{32444} = 180,12...$)

c) $3000^2 < 9000005 < 3001^2 \Rightarrow 3000 < \sqrt{9000005} < 3001$ ($\sqrt{9000005} = 3000,0008...$)

d) $1024 = 2^{10} = \sqrt{2^{20}} > \sqrt{2^{20} - 5} > 1023$ ($\sqrt{2^{20} - 5} = 1023,997...$)