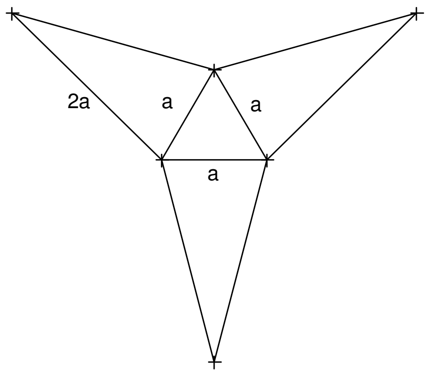
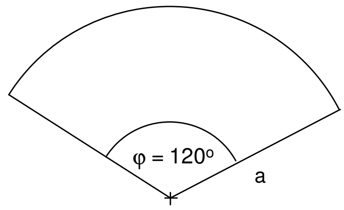
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Vermischte Aufgaben zur Raumgeometrie

1. Die Zeichnung zeigt das Netz einer geraden Pyramide bzw. eines geraden Kegels. Berechne jeweils das Volumen V und den Oberflächeninhalt A in Abhängigkeit von a. Skizziere dazu jeweils sauber ein beschriftetes Schrägbild und gib alle wichtigen Längen in Abhängigkeit von a an.

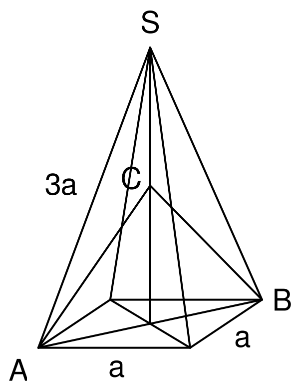




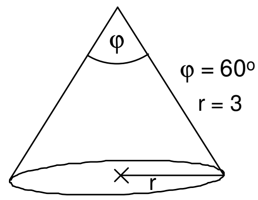
2. Das Bild zeigt eine gerade Pyramide mit einem Quadrat als Grundfläche. Der Punkt C halbiert die Höhe h. Berechne jeweils in Abhängigkeit von a
   a) das Volumen der Pyramide,
   b) den Oberflächeninhalt der Pyramide.
   c) die drei Seitenlängen im Dreieck ABC.

   Die Winkel im Dreieck ABC hängen nicht von a ab.

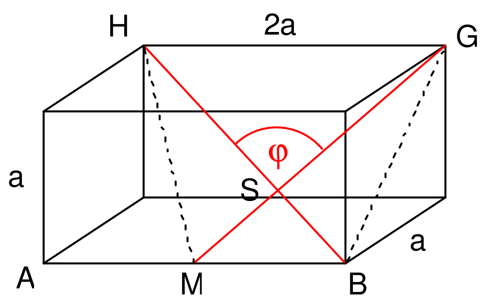
   d) Berechne die Winkel im Dreieck ABC.
   e) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC in Vielfachen von a^2.



3. Das Bild zeigt einen geraden Kegel.
   a) Berechne das Volumen des Kegels.
   b) Berechne den Oberflächeninhalt des Kegels.
   c) Zeichne ein sauberes und maßstäbliches Bild des Kegelmantels.



4. Das Bild zeigt einen Quader mit den Kantenlängen a, a und 2a. M halbiert die Kante [AB].
   a) Begründe, dass sich MG und BH in einem Punkt S schneiden. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [MG]?
   b) Berechne die Größe des Winkels ∢ GSH.
   c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks SGH in Vielfachen von a^2.



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Vermischte Aufgaben zur Raumgeometrie
Lösungen

1. Pyramide: $G = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ $\quad h_{Pyr} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} a\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{3}}\, a$

$h_{Pyr} = \frac{\sqrt{33}}{3} a$ und $V = \frac{1}{3} G \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3} a^3 = \frac{\sqrt{11}}{12} a^3$

$S = G + 3 \cdot A_1$ mit $A_1 = \frac{1}{2} a \cdot h_1$ mit $h_1 = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2} a$ also

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + \frac{3\sqrt{15}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{15}}{4} a^2$

Kegel: $m = a$; $r = \frac{120}{360} a = \frac{1}{3} a$; $G = r^2 \pi = \frac{\pi}{9} a^2$

$h_{Kegel} = \sqrt{m^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{9} a^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} a$ $\quad V = \frac{1}{3} G h_{Kegel} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi}{81} a^3$

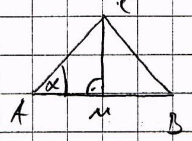
$M = r \pi m = \frac{\pi}{3} a^2$; $S = M + G = \frac{4}{9} \pi a^2$

2. a) $h_{Pyr} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{2}}\, a = \frac{\sqrt{34}}{2} a$; $V = \frac{1}{3} a^2 h_{Pyr} = \frac{\sqrt{34}}{6} a^3$

b) $S = a^2 + 4 \cdot A_1$ mit $A_1 = \frac{1}{2} a \cdot h_1$ mit $h_1 = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{1}{2} a\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2} a$

$S = a^2 + 2\sqrt{35}\, a^2 = (1 + 2\sqrt{35})\, a^2$

c) $\overline{AB} = \sqrt{2}\, a$; $\overline{BC} = \overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{34}}{4} a\right)^2} = \sqrt{\frac{42}{16} a^2} = \frac{\sqrt{42}}{4} a$

d) 

$\overline{MC} = \frac{1}{2} h_{Pyr} = \frac{\sqrt{34}}{4} a$; $\overline{AC} = \frac{\sqrt{42}}{4} a$; $\sin\alpha = \frac{\overline{MC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{42}} = \sqrt{\frac{17}{21}}$

$\Rightarrow \beta = \alpha = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{17}{21}}\right) = 64{,}12\ldots^\circ \approx 64{,}1^\circ$

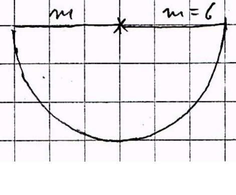
$\gamma = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 51{,}75\ldots^\circ \approx 51{,}8^\circ$

e) $F_{\Delta ABC} = \overline{AM} \cdot \overline{MC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot \frac{\sqrt{34}}{4} a = \frac{\sqrt{17}}{4} a^2$

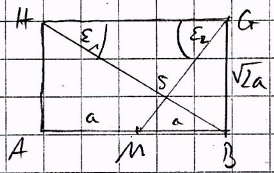
3. a) $h_{Pyr} = r \cdot \tan 60^\circ = 3 \cdot \sqrt{3}$; $V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\,\pi$

b) $m = \sqrt{r^2 + h_{Pyr}^2} = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = 6$; $M = r \pi m = 3 \cdot 6 \cdot \pi = 18\pi$

$S = r^2 \pi + r \pi m = (9 + 18)\pi = 27\pi$

c) 

4\. a, HB und MG sind zwei nicht parallele Geraden in der durch das Rechteck ABGH festgelegten Ebene.



$\overline{HS} : \overline{SB} = \overline{HG} : \overline{MB} = 2:1$ und analog $\overline{SG} : \overline{SM} = 2:1$

b, $\tan \varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varepsilon_1 = 35{,}264\ldots^\circ$; $\tan \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}\,a}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \varepsilon_2 = 54{,}735\ldots^\circ$

$\sphericalangle GSH = 180^\circ - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 90{,}00^\circ$

$\overline{HS} = \frac{2}{3}\overline{HB} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{6}\,a \qquad \overline{SG} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a$

$\overline{HS}^2 + \overline{SG}^2 = \frac{4}{9} \cdot 6a^2 + \frac{4 \cdot 3}{9} a^2 = \frac{36}{9} a^2 = 4a^2 = (2a)^2 = \overline{HG}^2$

$\Rightarrow$ Δ HSG ist rechtwinklig! Also $\sphericalangle GSH = 90^\circ$ exakt!

c, $F_{\Delta SGH} = \frac{1}{2}\,\overline{SG} \cdot \overline{HG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{6}\,a \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3}\,a = \frac{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3}\,a^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a^2$