3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9c, 29.03.2012, Gruppe A

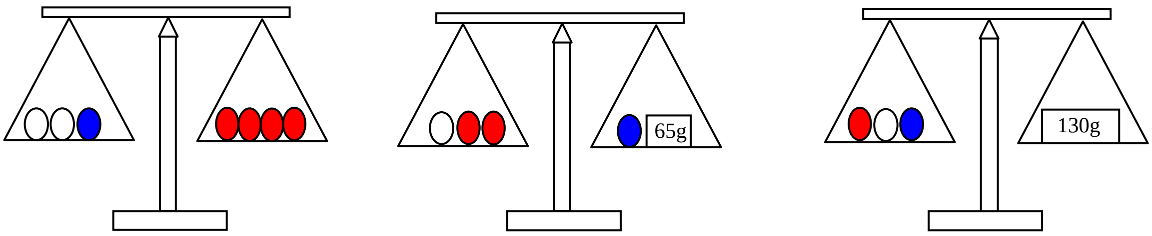
1. Vereinfache den Term und gib das Ergebnis in Wurzelschreibweise an!

$$\frac{\sqrt[3]{4a\cdot\sqrt[4]{2a^3}}}{\sqrt[12]{8a}}$$

2. Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

a) $\frac{5}{x^3} = -\frac{x^2}{2}$ b) $\sqrt[3]{2+x^4} = 3$

3. Ostereier gleicher Farbe haben jeweils gleiche Masse.
Berechne die jeweilige Masse eines weißen, roten bzw. blauen Ostereis!

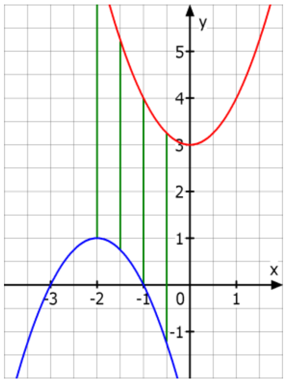


4. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit

$f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = -(x+2)^2 + 1$.

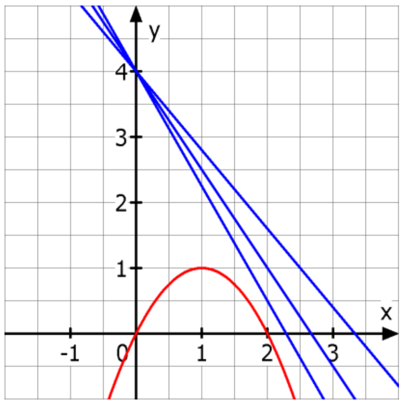
Unter den senkrechten Strecken zwischen den beiden Graphen gibt es eine mit minimaler Länge.

Bestimme diese Streckenlänge mit geeigneter Rechnung!



5. Eine Gerade g mit <u>negativer</u> Steigung soll durch den Punkt $P(0 / 4)$ gehen und die Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = x\cdot(2-x)$ berühren.
(Siehe Bild!)

Berechne die Funktionsgleichung der Geraden g und die Koordinaten des Berührpunkts.



Aufgabe	1	2a	b	3	4	5	Summe
Punkte	5	3	4	7	6	7	32

Gutes Gelingen! G.R.

3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9c, 29.03.2012, Gruppe B

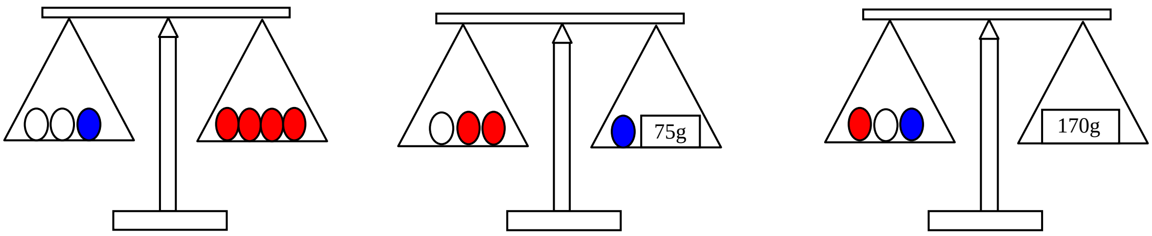
1. Vereinfache den Term und gib das Ergebnis in Wurzelschreibweise an!

$$\frac{\sqrt[3]{2x^2 \cdot \sqrt[4]{8x}}}{\sqrt[12]{2x^3}}$$

2. Bestimme alle Lösungen der Gleichung.

a) $\frac{x^3}{3} = -\frac{2}{x^2}$ b) $\sqrt[5]{7 + x^4} = 2$

3. Ostereier gleicher Farbe haben jeweils gleiche Masse.
Berechne die jeweilige Masse eines weißen, roten bzw. blauen Ostereis!

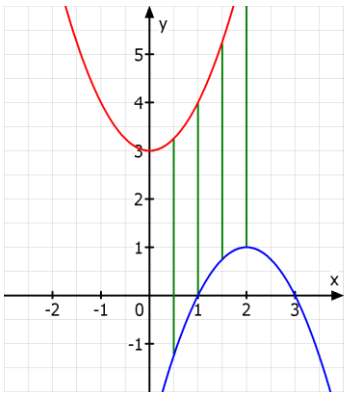


4. Das Bild zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit

$f(x) = x^2 + 3$ und $g(x) = -(x-2)^2 + 1$

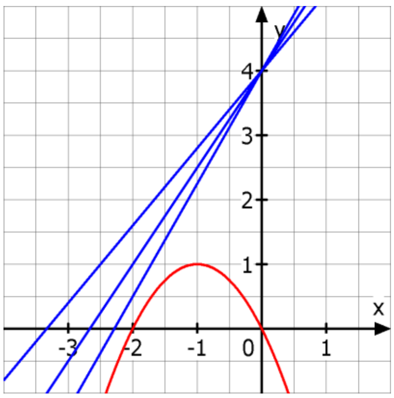
Unter den senkrechten Strecken zwischen den beiden Graphen gibt es eine mit minimaler Länge.

Bestimme diese Streckenlänge mit geeigneter Rechnung!



5. Eine Gerade g mit <u>positiver</u> Steigung soll durch den Punkt $P(0 / 4)$ gehen und die Parabel mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x \cdot (2 + x)$ berühren.
(Siehe Bild!)

Berechne die Funktionsgleichung der Geraden g und die Koordinaten des Berührpunkts.



Aufgabe	1	2a	b	3	4	5	Summe
Punkte	5	3	4	7	6	7	32

Gutes Gelingen! G.R.

3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9c, 29.03.2012, Gruppe A * Lösungen

1. $\dfrac{\sqrt[3]{4a\cdot\sqrt[4]{2a^3}}}{\sqrt[12]{8a}} = \dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{12}}\cdot a^{\frac{1}{12}}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}-\frac{3}{12}}\cdot a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}} = 2^{\frac{6}{12}}\cdot a^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2a}$

2. a) $\dfrac{5}{x^3} = -\dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow 10 = -x^5 \Leftrightarrow x^5 = -10 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{10}$

   b) $\sqrt[3]{2+x^4} = 3 \Leftrightarrow 2 + x^4 = 3^3 \Leftrightarrow x^4 = 25 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{25} = \pm\sqrt{5}$

3. w = Masse des weißen Eis, r = Masse des roten Eis, b = Masse des blauen Eis

   (1) $2w + b = 4r$ (2) $w + 2r = b + 65\,g$ (3) $w + r + b = 130\,g$

   Aus (3) $\Rightarrow$ $w = 130g - r - b$; einsetzen in (1) und (2)

   (1) $2\cdot(130\,g - r - b) + b = 4r$ (2) $130\,g - r - b + 2r = b + 65\,g$

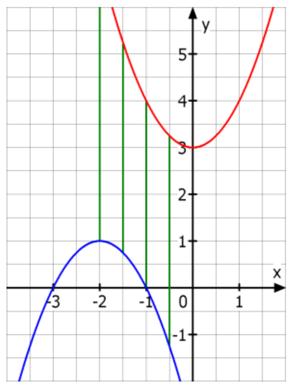
   (1) $260g = b + 6r$ (2) $65g + r = 2b$ aus (1) $b = 260g - 6r$; eingesetzt in (2)

   (2) $65g + r = 2\cdot(260g - 6r) \Rightarrow 65g + r = 520g - 12r \Rightarrow 13r = 455\,g \Rightarrow r = 35g$
   in (1) $b = 260g - 6r = 260g - 6\cdot 35g \Rightarrow b = 50g$
   in (3) $w = 130g - r - b = 130g - 35g - 50g \Rightarrow w = 45g$

4. Streckenlänge $d = d(x)$

   $d = d(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 3 + (x+2)^2 - 1 = 2x^2 + 4x + 6$
   $d(x) = 2x^2 + 4x + 6 = 2\cdot(x^2 + 2x + 1^2 - 1^2) + 6 = 2\cdot(x+1)^2 - 2 + 6$
   $d(x) = 2\cdot(x+1)^2 + 4$

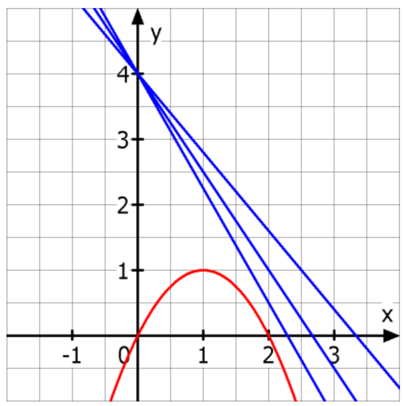
   Die senkrechte Strecke bei $x = -1$ ist am kürzesten und hat die Länge $d_{min} = d(-1) = 2\cdot(0)^2 + 4 = 4$



5. Geradengleichung: $g(x) = 4 + m\cdot x$ (mit $m < 0$)

   Die Graphen von f und von g sollen nur genau einen Punkt gemeinsam haben, d.h. die Gleichung $f(x) = g(x)$ muss genau eine Lösung besitzen.

   $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x\cdot(2-x) = 4 + m\cdot x \Leftrightarrow$
   $2x - x^2 = 4 + m\cdot x \Leftrightarrow 0 = x^2 + (m-2)\cdot x + 4$
   $0 = x^2 + (m-2)\cdot x + 4$ hat genau dann genau eine Lösung,
   wenn gilt: $D = 0$ mit $D = (m-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4$ also
   $(m-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 16 \Leftrightarrow m - 2 = \pm 4 \Leftrightarrow m = -2$ (denn $m < 0$)



   Berührpunkt B:
   $0 = x_B^2 + (-2-2)\cdot x_B + 4 \Leftrightarrow 0 = x_B^2 - 4\cdot x_B + 4 \Leftrightarrow 0 = (x_B - 2)^2 \Leftrightarrow x_B = 2$ und $y_B = 0$
   also $B(2/0)$

3. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 9c, 29.03.2012, Gruppe B * Lösungen

1. $\dfrac{\sqrt[3]{2x^2\cdot\sqrt[4]{8x}}}{\sqrt[12]{2x^3}} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{12}}\cdot x^{\frac{3}{12}}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}}\cdot x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}-\frac{3}{12}} = 2^{\frac{6}{12}}\cdot x^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x}$

2. a) $\dfrac{x^3}{3} = -\dfrac{2}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = -6 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{6}$

b) $\sqrt[5]{7+x^4} = 2 \Leftrightarrow 7+x^4 = 2^5 \Leftrightarrow x^4 = 25 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt[4]{25} = \pm\sqrt{5}$

3. w = Masse des weißen Eis, r = Masse des roten Eis, b = Masse des blauen Eis

(1) $2w + b = 4r$ (2) $w + 2r = b + 75g$ (3) $w + r + b = 170g$

Aus (3) $\Rightarrow$ $w = 170g - r - b$; einsetzen in (1) und (2)

(1) $2\cdot(170g - r - b) + b = 4r$ (2) $170g - r - b + 2r = b + 75g$

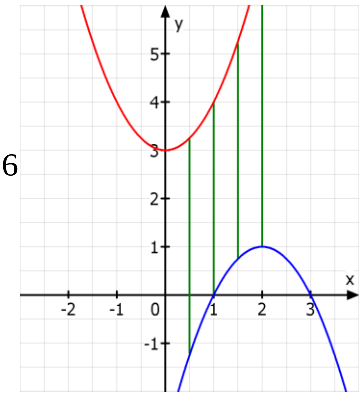
(1) $340g = b + 6r$ (2) $95g + r = 2b$ aus (1) $b = 340g - 6r$; eingesetzt in (2)

(2) $95g + r = 2\cdot(340g - 6r) \Rightarrow 95g + r = 680g - 12r \Rightarrow 13r = 585g \Rightarrow r = 45g$

in (1) $b = 340g - 6r = 340g - 6\cdot 45g \Rightarrow b = 70g$

in (3) $w = 170g - r - b = 170g - 45g - 70g \Rightarrow w = 55g$

4. Streckenlänge $d = d(x)$



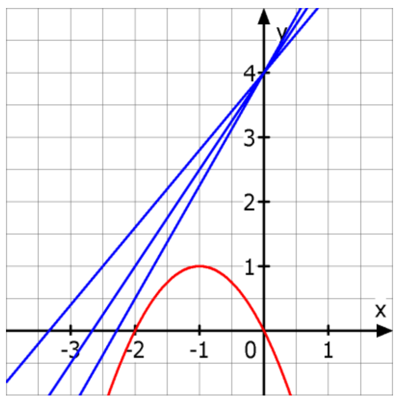
$d = d(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 3 + (x-2)^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 6$

$d(x) = 2x^2 - 4x + 6 = 2\cdot(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 6 = 2\cdot(x-1)^2 - 2 + 6$

$d(x) = 2\cdot(x-1)^2 + 4$

Die senkrechte Strecke bei $x = 1$ ist am kürzesten und hat die Länge $d_{min} = d(1) = 2\cdot(0)^2 + 4 = 4$

5. Geradengleichung: $g(x) = 4 + m\cdot x$ (mit $m > 0$)



Die Graphen von f und von g sollen nur genau einen Punkt gemeinsam haben, d.h. die Gleichung $f(x) = g(x)$ muss genau eine Lösung besitzen.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x\cdot(2+x) = 4 + m\cdot x \Leftrightarrow$

$-2x - x^2 = 4 + m\cdot x \Leftrightarrow 0 = x^2 + (m+2)\cdot x + 4$

$0 = x^2 + (m+2)\cdot x + 4$ hat genau dann genau eine Lösung, wenn gilt: $D = 0$ mit $D = (m+2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4$ also

$(m+2)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 16 \Leftrightarrow m+2 = \pm 4 \Leftrightarrow m = +2$ (denn $m > 0$)

Berührpunkt B :

$0 = x_B{}^2 + (2+2)\cdot x_B + 4 \Leftrightarrow 0 = x_B{}^2 + 4\cdot x_B + 4 \Leftrightarrow 0 = (x_B + 2)^2 \Leftrightarrow x_B = -2$ und $y_B = 0$

also $B(-2 / 0)$