Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Übungsaufgaben zur 2. Schulaufgabe

Algebra

1. Bestimme durch quadratische Ergänzung die Koordinaten des Scheitels der Normalparabel!

a) $f(x) = x^2 + 5x - 3,75$ b) $f(x) = 2 + x^2 - 3x$
c) $f(x) = x \cdot (3+x) - 2 \cdot (x-1)$ d) $f(x) = (x-1) \cdot (x+3) + x$
e) $f(x) = 2x \cdot (3-x) + 3 \cdot (x-1)^2$ f) $f(x) = (2-3x)^2 - 8 \cdot (x-1)^2$

2. Bestimme – falls vorhanden – die Schnittpunkte von Normalparabel und Gerade.
Prüfe dein Ergebnis mit einer genauen Zeichnung!

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ und $g(x) = 0,5 \cdot (x+1)$

b) $f(x) = x^2 + x - 2,25$ und $g(x) = 2 - \frac{1}{3}x$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 4$ und $g(x) = -2x + 4$

3. Bestimme alle Lösungen der Gleichung!

a) $x^2 + 5x = 14$ b) $x^2 + 10 = 8x$

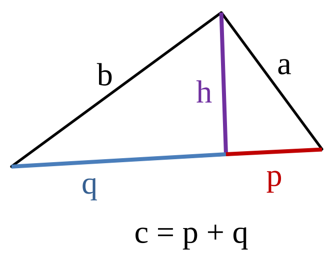
c) $x \cdot (x+3) = 4\frac{1}{3}$ d) $(3-x) \cdot (2-x) = 6$

e) $x^2 = 3x - 2,25$ f) $(x-2)^2 + x^2 = (x+3)^2 - 3$

Geometrie

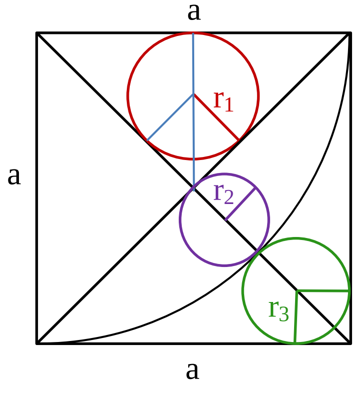
4. Im rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hypotenuse c (siehe Bild) sind einige Streckenlängen bekannt. Berechne jeweils alle restlichen Längen!

a) $a = 3$; $h = 2$ b) $c = 6$; $b = 5$
c) $q = 4$; $p = 3$ d) $q = 5$; $a = 3$



5. Einem Quadrat der Kantenlänge a sind drei kleine Kreise mit den Radien r_1 , r_2 und r_3 einbeschrieben.

Bestimme diese drei Radien jeweils als „Bruchteile“ von a !



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Übungsaufgaben zur 2. Schulaufgabe * Lösungen

Algebra

1.

a) $f(x) = x^2 + 5x - 3{,}75 = (x+2{,}5)^2 - 6{,}25 - 3{,}75 = (x+2{,}5)^2 - 10$ also $S(-2{,}5/-10)$

b) $f(x) = 2 + x^2 - 3x = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 + 2 = (x-1{,}5)^2 - 0{,}25$ also $S(1{,}5\ /-0{,}25)$

c) $f(x) = x\cdot(3+x) - 2\cdot(x-1) = x^2 + x + 2 = (x+\frac{1}{2})^2 - 0{,}25 + 2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ also $S(-\frac{1}{2}/\frac{7}{4})$

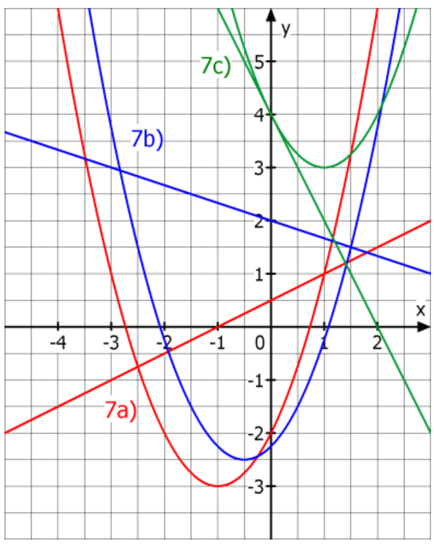
d) $f(x) = (x-1)\cdot(x+3) + x = x^2 + 3x - 3 = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 - 3 = (x+1{,}5)^2 - 5{,}25$; $S(-1{,}5/-5{,}25)$

e) $f(x) = 2x\cdot(3-x) + 3\cdot(x-1)^2 = 6x - 2x^2 + 3x^2 - 6x + 3 = x^2 + 3 = (x-0)^2 + 3$ also $S(0/3)$

f) $f(x) = (2-3x)^2 - 8\cdot(x-1)^2 = 4 - 12x + 9x^2 - 8x^2 + 16x - 8 = x^2 + 4x - 4 =$

$(x+2)^2 - 4 - 4 = (x+2)^2 - 8$ also $S(-2/-8)$

2.



a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0{,}5x + 0{,}5 \Leftrightarrow x^2 + 1{,}5x = 2{,}5$

$(x+\frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} = \frac{40}{16} \Leftrightarrow (x+\frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \Leftrightarrow x + \frac{3}{4} = \pm\frac{7}{4} \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{7}{4}$; $S_1(1/1)$ und $S_2(-\frac{5}{2}/-\frac{3}{4})$

b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + x - 2{,}25 = 2 - \frac{1}{3}x \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{3}x = \frac{17}{4}$

$(x+\frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9} = \frac{17}{4} \Leftrightarrow (x+\frac{2}{3})^2 = \frac{169}{36} \Leftrightarrow x + \frac{2}{3} = \pm\frac{13}{6}$

$x_{1/2} = -\frac{4}{6} \pm \frac{13}{6}$; $S_1(\frac{3}{2}/\frac{3}{2})$ und $S_2(-2\frac{5}{6}/\ 2\frac{17}{18})$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = -2x + 4 \Leftrightarrow x^2 = 0$

$x_{1/2} = 0$ und $S(0/4)$ "Berührpunkt"

3.

a) $x^2 + 5x = 14 \Leftrightarrow (x+2{,}5)^2 - 6{,}25 = 14 \Leftrightarrow (x+2{,}5)^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow x + 2{,}5 = \pm\frac{9}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -7$

b) $x^2 + 10 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x = -10 \Leftrightarrow (x-4)^2 - 16 = -10 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 6 \Leftrightarrow x - 4 = \pm\sqrt{6} \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{6}$ $(x_1 \approx 6{,}45\ ;\ x_2 \approx 1{,}55)$

c) $x\cdot(x+3) = 4\frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + 3x = \frac{13}{3} \Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = \frac{13}{3} \Leftrightarrow (x+\frac{3}{2})^2 = \frac{79}{12} \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{79}{12}} \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{79\cdot 3}{12\cdot 3}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{237}}{6}$ $(x_1 \approx 1{,}07\ ;\ x_2 \approx -4{,}07)$

d) $(3-x)\cdot(2-x) = 6 \Leftrightarrow 6 - 5x + x^2 = 6 \Leftrightarrow x\cdot(x-5) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 5$

e) $x^2 = 3x - 2{,}25 \Leftrightarrow x^2 - 3x = -2{,}25 \Leftrightarrow (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 = -2{,}25 \Leftrightarrow (x-1{,}5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

f) $(x-2)^2 + x^2 = (x+3)^2 - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 = x^2 + 6x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 10x = 2 \Leftrightarrow$

$(x-5)^2 - 25 = 2 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 27 \Leftrightarrow x - 5 = \pm\sqrt{27} \Leftrightarrow x_{1/2} = 5 \pm 3\sqrt{3}$

$(x_1 \approx 10{,}20\ ;\ x_2 \approx -0{,}20)$

Geometrie

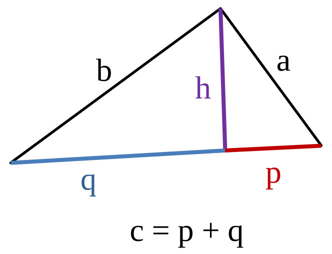
4.

a) $a = 3$; $h = 2$ es gilt $a^2 = h^2 + p^2 \Rightarrow$

$p = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

$a^2 = c \cdot p \Rightarrow c = \dfrac{9}{\sqrt{5}} = 1{,}8 \cdot \sqrt{5}$ und $q = c - p = 0{,}8 \cdot \sqrt{5}$

$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{\dfrac{81}{5} - \dfrac{9 \cdot 5}{5}} = \sqrt{\dfrac{36}{5}} = \dfrac{6}{5} \cdot \sqrt{5} = 1{,}2 \cdot \sqrt{5}$



b) $c = 6$; $b = 5$ es gilt $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$

$p = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{11}{6}$ und $q = c - p = 6 - \dfrac{11}{6} = \dfrac{36-11}{6} = \dfrac{25}{6}$ und $h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\dfrac{11}{6} \cdot \dfrac{25}{6}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt{11}}{6}$

c) $q = 4$; $p = 3$ und $h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$; $c = p + q = 7$; $a = \sqrt{p \cdot c} = \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{21}$

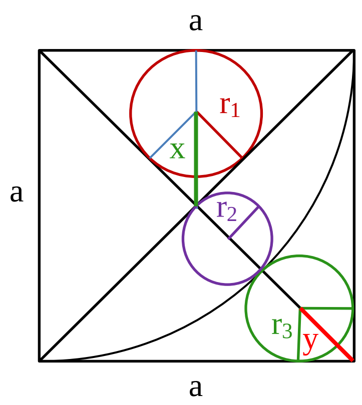
$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{49-21} = \sqrt{28} = 2 \cdot \sqrt{7}$

d) $q = 8$; $a = 3$ und $a^2 = (p+q) \cdot p \Rightarrow 9 = (p+8) \cdot p \Leftrightarrow 9 = p^2 + 8p \Leftrightarrow 9 = (p+4)^2 - 16$

$\Leftrightarrow (p+4)^2 = 25 \Leftrightarrow p + 4 = +\sqrt{25} \Leftrightarrow p = 5 - 4 = 1$ und $c = p + q = 1 + 8 = 9$

$h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{1 \cdot 8} = 2 \cdot \sqrt{2}$ und $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{81 - 9} = \sqrt{72} = 6 \cdot \sqrt{2}$

5.



Berechnung von r_1 :

$x + r_1 = \dfrac{a}{2}$ und $x = \sqrt{2} \cdot r_1 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot r_1 + r_1 = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow$

$r_1 \cdot (1 + \sqrt{2}) = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow$

$r_1 = \dfrac{a \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \dfrac{a \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} \approx 0{,}207\,a$

Berechnung von r_2 :

$a = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\,a + 2 \cdot r_2 \Rightarrow 2r_2 = a - \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\,a \Rightarrow r_2 = \dfrac{2a - \sqrt{2}\,a}{2 \cdot 2} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot a \approx 0{,}146\,a$

Berechnung von r_3 :

$a + r_3 + y = \sqrt{2} \cdot a$ und $y = \sqrt{2} \cdot r_3 \Rightarrow r_3 + \sqrt{2} \cdot r_3 = \sqrt{2} \cdot a - a \Rightarrow r_3 \cdot (1 + \sqrt{2}) = (\sqrt{2} - 1) \cdot a \Rightarrow$

$r_3 = \dfrac{(\sqrt{2} - 1) \cdot a}{(1 + \sqrt{2})} = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2 \cdot a}{(1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \dfrac{(2 - 2 \cdot \sqrt{2} + 1) \cdot a}{2 - 1} = (3 - 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot a \approx 0{,}172\,a$