Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Laplace-Experimente (Wiederholung 8. Klasse)

Experimente, deren Ergebnis zufällig ist, nennt man **Zufallsexperimente**.
Beispiele: Wurf einer Münze, Wurf eines Würfels, Ziehung der Lottozahlen, ...

Die Ergebnisse eines Zufallexperiments fasst man zur so genannten **Ergebnismenge Ω** zusammen.

Beispiele: „Wurf einer Münze" $\Omega = \{W, Z\}$ wobei gilt: W = Wappen, Z = Zahl
„Wurf eines Würfels" $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
„Wurf zweier Würfel" $\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), \ldots\ (6,6)\}$

Für die Anzahl der Elemente einer Menge Ω schreibt man $|\Omega|$. („**Mächtigkeit**" der Menge Ω)
Jede Teilmenge von Ω entspricht einem so genannten **Ereignis**. Ereignisse gibt man als Menge mit großen lateinischen Buchstaben (A, B, C, ... E_1, E_2, ...) an:

Beispiel: „Wurf eines Würfels" $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$ = „gerade Zahl" $B = \{1, 3, 5\}$ = „ungerade Zahl"
$C = \{2, 3, 5\}$ = „Primzahl" $D = \{4, 5, 6\}$ = „Zahl größer als 3"

Besondere Ereignisse: $E_1 = \Omega$ = „**sicheres Ereignis**" $E_2 = \{\ \}$ = „**unmögliches Ereignis**"
$\overline{A} = \Omega \setminus A$ = „**Gegenereignis** zu A"

Das Ereignis E tritt ein, wenn das Ergebnis ω des Experiments ein Element von E ist.
Würfelt man also eine 4, so ist das Ereignis „gerade Zahl" eingetreten, nicht aber „Primzahl".

Mit Ereignissen kann man „rechnen", man kann **Vereinigungsmengen $A \cup B$** und **Schnittmengen $C \cap D$** bilden.
Das Ereignis $A \cup B$ tritt ein, wenn das Ereignis A **oder** das Ereignis B eintritt.
Das Ereignis $C \cap D$ tritt ein, wenn das Ereignis A **und** das Ereignis B eintritt.

Führt man ein Zufallsexperiment (z.B. „Wurf eines Würfels") **n-mal** durch und tritt dabei das Ergebnis A genau **k-mal** auf, so heißt $\frac{k}{n}$ die **relative Häufigkeit** dieses Ergebnisses.

Je größer n ist, umso weniger schwankt die relative Häufigkeit um einen festen Zahlenwert.
Man spricht dabei vom so genannten „**Gesetz der großen Zahlen**".

Beispiel: „n-maliger Wurf eines Würfels"
n = 100

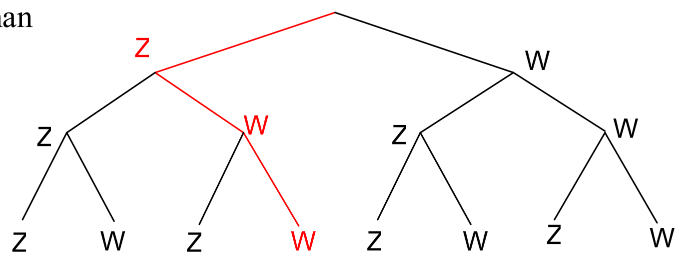
Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	17	15	21	20	11	16
Relative Häufigkeit	17%	15%	21%	20%	11%	16%

n = 10000

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Würfe	1666	1650	1647	1720	1678	1639
Relative Häufigkeit	16,7%	16,5%	16,5%	17,2%	16,8%	16,4%

Mit einem **Baumdiagramm** kann man viele Zufallsexperimente übersichtlich darstellen.

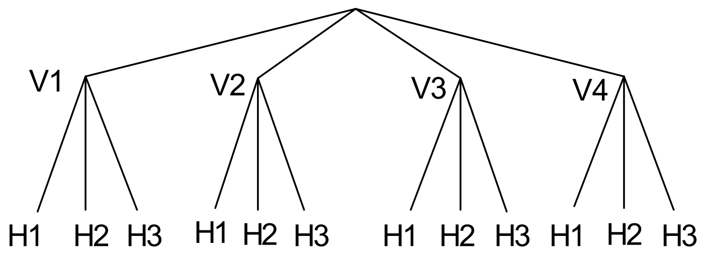
Beispiel:
3-maliger Wurf einer Münze:



Ω = {ZZZ, ZZW, ZWZ, ZWW, WZZ, WZW, WWZ, WWW}
Zu jedem Ergebnis gehört ein so genannter Pfad des Baumdiagramms.

Mit **Baumdiagrammen** oder allgemeiner nach dem so genannten **Zählprinzip** lässt sich die Gesamtzahl an Möglichkeiten ermitteln.

Beispiel:
Ein Restaurant bietet für das Mittagsmenü 4 Vorspeisen und 3 Hauptgerichte an.
Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Zusammenstellung?



Es sind $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten.

Anwendung des Zählprinzips:
Auf wie viele Möglichkeiten kann man 5 verschiedene Buchstaben (zu einem Wort) anordnen?
Lösung: Das ist auf $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ verschiedene Arten möglich.

Für $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ schreibt man auch **5 !** („ **5 Fakultät**“)

Mit dem Taschenrechner kannst du Fakultäten schnell berechnen.

Laplace-Experimente

Ein Zufallsexperiment heißt **Laplace-Experiment**, wenn jedes der möglichen Ergebnisse **gleich wahrscheinlich** ist.
Dementsprechend nennt man einen Würfel, bei dem jede Zahl mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt, einen **idealen** bzw. einen **Laplace-Würfel** oder kurz **L-Würfel**.
Bei Laplace-Experimenten gilt für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses:

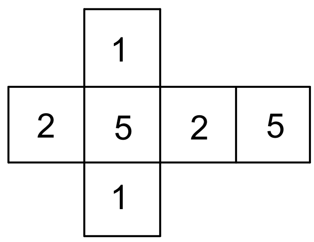
$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

Aufgaben:

1. In einer Urne befinden sich 10 Lose. 6 davon sind Nieten, drei der restlichen liefern einen Gewinn von 1 € und ein Los bringt den Hauptgewinn von 5 €.
   a) Hans zieht ein Los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse?
   A = „Hans zieht eine Niete“ B = „Hans erhält mindestens 1 €“
   $C = \overline{A}$
   b) Hans zieht zwei Lose (natürlich ohne Zurücklegen des ersten Loses).
   Wie groß sind nun die Wahrscheinlichkeiten für
   A = „Hans zieht nur Nieten“ B = „Hans erhält mindestens einen Gewinn“
   C = „Hans hat genau 2 € Gewinn“ D = „Hans gewinnt 5 €“

2. Wie viele verschiedenen (auch unsinnigen) Wörter kann man mit den Buchstaben des Wortes „EUROPA“ bzw. „MUENCHEN“ bzw. „SOMMERFERIEN“ schreiben?

3. Petra wirft den Würfel mit dem abgebildeten Netz zweimal.
   Zeichne ein Baumdiagramm und bestimme die Wahrscheinlichkeiten für
   A = „Mindestens eine 2“ B = „Augensumme > 4“
   C = „Augendifferenz > 2“ D = „Keine 5“



4. Eine Laplace-Münze wird 5-mal geworfen. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse.
   A = „Genau 4-mal Wappen“ B = „Mindestens 2-mal Wappen“

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Laplace-Experimente **(Wiederholung 8. Klasse)**
Lösung der Aufgaben

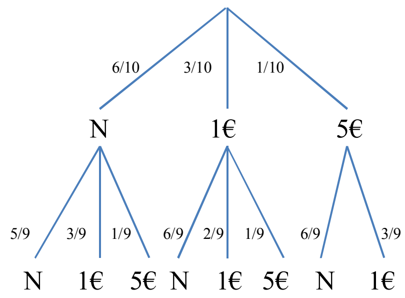
1. a) $P(A) = \frac{6}{10} = 60\%$; $P(B) = \frac{4}{10} = 40\%$; $P(C) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 40\%$

   b) $P(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \approx 33{,}3\%$

   $P(B) = P(\overline{A}) = \frac{2}{3} \approx 66{,}7\%$

   $P(C) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \approx 6{,}7\%$

   $P(D) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{15} \approx 13{,}3\%$



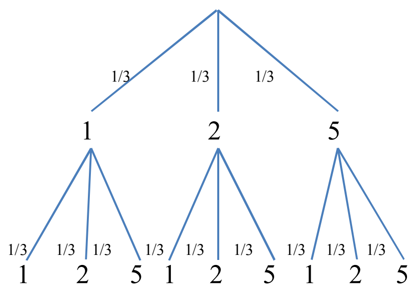
2. EUROPA: 6 verschiedene Buchstaben
   Es gibt $6! = 720$ verschiedene Wörter.
   $MUE_1N_1CHE_2N_2$: 8 Buchstaben, wobei je zwei davon doppelt auftreten.
   Es gibt $\frac{8!}{2! \cdot 2!} = \frac{40320}{2 \cdot 2} = 10080$ verschiedene Wörter.
   $SOM_1M_2E_1R_1FE_2R_2IE_3N$:
   12 Buchstaben, wobei 2 davon doppelt und einer davon dreifach auftritt.
   Es gibt $\frac{12!}{2! \cdot 2! \cdot 3!} = 19958400$ verschiedene Wörter.

3. $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\%$

   $P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \approx 55{,}6\%$

   $P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\%$

   $P(D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\%$



4. $P(A) = P(\text{"genau 4mal Wappen"}) =$

   $(\frac{1}{2})^5 \cdot 5 = \frac{5}{32} \approx 15{,}6\%$

   $P(B) = P(\text{"mindestens 2mal Wappen"}) =$

   $1 - P(\text{"höchstens 1mal Wappen"}) =$

   $1 - (\frac{1}{2})^5 \cdot 1 + (\frac{1}{2})^5 \cdot 5 = 1 - \frac{6}{32} = \frac{13}{16} = 81{,}25\%$