Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Rechnen mit reellen Zahlen

1. Bestimme die maximale Definitionsmenge des Terms.

a) $\sqrt{2x}$ b) $\sqrt{2-x}$ c) $\sqrt{2x+6}$

d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{x} - 1}$ f) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x} - 2}$

Beachte im Folgenden:

Alle Endergebnisse werden immer so weit wie möglich radiziert, der Nenner wird immer rational gemacht.

2. Radiziere so weit wie möglich. (Es gelte $a > 0$, $b > 0$, $c \in R$)

a) $\sqrt{49+626}$ b) $\sqrt{960}$ c) $\sqrt{12 \cdot 28 \cdot 21}$

d) $\sqrt{8ab^2}$ e) $\sqrt{18b^3c^2}$ f) $\sqrt{30a^2 \cdot 105c^3}$

3. Mache den Nenner rational!

a) $\dfrac{2}{\sqrt{75}}$ b) $\dfrac{2}{3 + \sqrt{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

d) $\sqrt{3\dfrac{1}{8}}$ e) $\sqrt{22{,}05}$ f) $\sqrt{1\dfrac{2}{5} + 2\dfrac{1}{3}}$

4. Vereinfache den Term

a) $\sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{2 \cdot 18}}}$ b) $2 \cdot \sqrt{6} \cdot \left(\sqrt{12} + \sqrt{18} \right) - \sqrt{3} \cdot (12 + 3\sqrt{6})$

c) $\left(\sqrt{8} - 3 \cdot \sqrt{18} + 2 \cdot \sqrt{32} \right) \cdot \sqrt{2}$ d) $\left(3 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{80} \right) \cdot 2\sqrt{5}$

e) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{10}}$ f) $\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2}$

5. Berechne mit dem Taschenrechner und runde das Ergebnis auf Hundertstel.

a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{12} - \sqrt{11}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$ d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{13} - \sqrt{7}}{\sqrt{5}} + 3}$

1\. a) $\sqrt{2x}$; $D = R_o^+$ b) $\sqrt{2-x}$; $D =]-\infty; 2]$

c) $\sqrt{2x+6}$; $D = [-3 ; \infty [$ d) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+4}$; $D = [-4 ; 0]$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{x} - 1}$; $D = R_o^+ \setminus \{1\}$ f) $\dfrac{3 \cdot \sqrt{2x+3}}{\sqrt{x} - 2}$; $D = R_o^+ \setminus \{4\}$

2\. a) $\sqrt{49+626} = \sqrt{675} = \sqrt{25 \cdot 9 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 15\sqrt{3}$

b) $\sqrt{960} = \sqrt{64 \cdot 15} = 8\sqrt{15}$

c) $\sqrt{12 \cdot 28 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

d) $\sqrt{8ab^2} = \sqrt{4b^2 \cdot 2a} = 2b \cdot \sqrt{2a}$ (denn $b \geq 0$)

e) $\sqrt{18b^3c^2} = \sqrt{9 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot 2b} = 3 \cdot b \cdot |c| \cdot \sqrt{2b} = 3b|c|\sqrt{2b}$ (denn $c \in R$)

f) $\sqrt{30a^2 \cdot 105c^3} = \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot c^2 \cdot c} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot a^2 \cdot c^2 \cdot 14c} = 15ac\sqrt{14c}$

(c muss hier µ 0 sein, denn für $c < 0$ wäre der Radikand negativ. Man benötigt also keine Betragsstriche.)

3\. a) $\dfrac{2}{\sqrt{75}} = \dfrac{2}{\sqrt{25 \cdot 3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{15}$

b) $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}} = \dfrac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5})} = \dfrac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \dfrac{2 \cdot (3-\sqrt{5})}{2 \cdot 2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \dfrac{1 \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{3-5} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{-2} = -\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

d) $\sqrt{3\frac{1}{8}} = \sqrt{\dfrac{25}{8}} = \sqrt{\dfrac{25 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4} = (1{,}25\sqrt{2})$

e) $\sqrt{22{,}05} = \sqrt{\dfrac{2205}{100}} = \sqrt{\dfrac{5 \cdot 9 \cdot 49}{100}} = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot \sqrt{5}}{10} = \dfrac{21\sqrt{5}}{10}$ $(= 2{,}1\sqrt{5})$

f) $\sqrt{1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \dfrac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{21+35}{15}} = \sqrt{\dfrac{56 \cdot 15}{15 \cdot 15}} = \dfrac{\sqrt{4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}}{15} = \dfrac{2\sqrt{210}}{15}$

4. a) $\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{2\cdot 18}}} = \sqrt{11+\sqrt{19+6}} = \sqrt{11+5} = \sqrt{16} = 4$

b) $2\cdot\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt{12}+\sqrt{18}\right) - \sqrt{3}\cdot(12+3\sqrt{6}) = 2\cdot\sqrt{6\cdot 6\cdot 2} + 2\cdot\sqrt{6\cdot 6\cdot 3} = 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3}$

c) $\left(\sqrt{8} - 3\cdot\sqrt{18} + 2\cdot\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2} = \sqrt{8\cdot 2} - 3\cdot\sqrt{18\cdot 2} + 2\cdot\sqrt{32\cdot 2} = 4 - 3\cdot 6 + 2\cdot 8 = 2$

d) $\left(3\cdot\sqrt{5} - \sqrt{20} + \sqrt{80}\right)\cdot 2\sqrt{5} = \left(3\cdot\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}\right)\cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 10\cdot 5 = 50$

e) $\dfrac{2\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3+\sqrt{10}} = \dfrac{(2\sqrt{5} - \sqrt{2})\cdot(\sqrt{10} - 3)}{(3+\sqrt{10})\cdot(\sqrt{10} - 3)} = \dfrac{2\sqrt{5\cdot 10} - 6\sqrt{5} - \sqrt{2\cdot 10} + 3\sqrt{2}}{10 - 9} =$

$2\cdot 5\cdot\sqrt{2} - 6\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2} - 8\sqrt{5}$

f) $\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{\sqrt{6} + 2} = \dfrac{(2\sqrt{3} - \sqrt{6})\cdot(\sqrt{6} - 2)}{(\sqrt{6} + 2)\cdot(\sqrt{6} - 2)} = \dfrac{2\sqrt{18} - 4\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{6}}{6 - 4} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6}$

5. a) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = 2,23771042... \approx 2,24$

b) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{12} - \sqrt{11}} = 24,4482567... \approx 24,45$

c) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5}}}}}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} = 0,40908243... \approx 0,41$

d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{13} - \sqrt{7}}{\sqrt{5}} + 3} = 1,85181953... \approx 1,85$