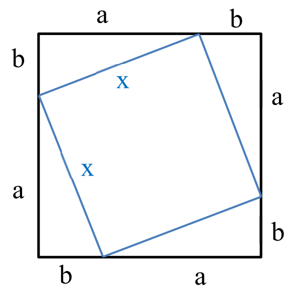
Mathematatik * Jahrgangsstufe 9 * Konstruktion irrationaler Längen

Im Quadrat ABCD mit der Kantenlänge $a = 6$ werden im Abstand 1 von den Ecken die Punkte E, F, G und H auf den Seiten eingetragen. (Siehe Bild unten!)

a) Begründe, dass das entstehende Viereck EFGH ebenfalls ein Quadrat ist.

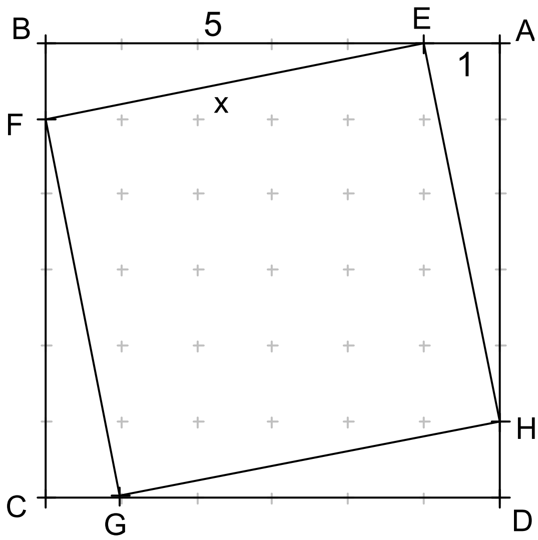
b) Bestimme die Seitenlänge x in diesem Quadrat EFGH.
(Finde zuerst geometrisch heraus, welchen Wert x^2 .)
Gib den Wert von x exakt und auf 8 Stellen gerundet an.



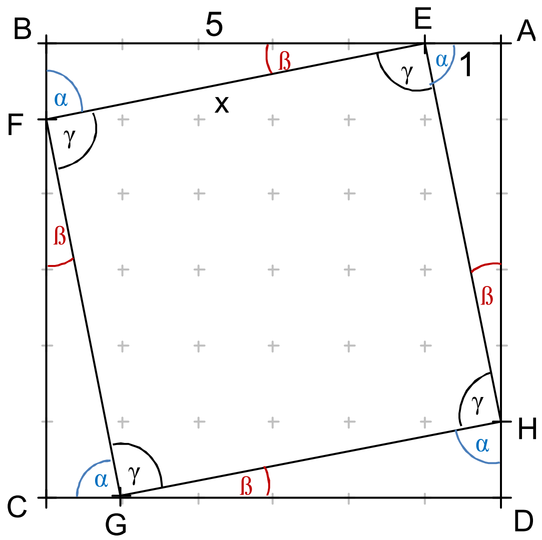
c) Nach Aufgabe a) ist im nebenan abgebildeten Quadrat der Kantenlänge $a + b$ das Viereck mit der Kantenlänge x ebenfalls ein Quadrat.

Zeige: $a^2 + b^2 = x^2$

d) Versuche nun Quadrate mit der Kantenlänge $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{17}$ zu konstruieren!



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Konstruktion irrationaler Längen



a)
Die rechtwinkligen Dreiecke EBF, HAE, GDH und FCG sind jeweils nach dem SWS-Satz zueinander kongruent, und damit gilt dann auch $\overline{EF} = \overline{HE} = \overline{GH} = \overline{FG} = x$.
Da sich α und $ß$ zu 90^o ergänzen, gilt $180^o = \gamma + \alpha + ß = \gamma + 90^o$, also $\gamma = 90^o$.
Das Viereck EFGH ist damit ein Quadrat.

b) Flächeninhalt des Quadrats ABCD:

$$A_{ABCD} = (5+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1 + x^2 \Rightarrow$$

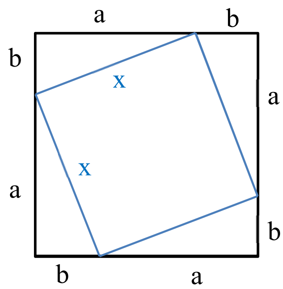
$$x^2 = 36 - 10 = 26 \Rightarrow x = \sqrt{26}$$

$$x = 5{,}0990195135... \approx 5{,}09901951$$

c) Für den Flächeninhalt des Quadrats mit der Kantenlänge $a + b$ gilt:

$$(a+b)^2 = x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \Rightarrow$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = x^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2$$



d) Im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c gilt also $a^2 + b^2 = c^2$.

Wegen $2^2 + 1^2 = 5 = (\sqrt{5}\,)^2$ und $3^2 + 1^2 = 10 = (\sqrt{10}\,)^2$ und $3^2 + 2^2 = 13 = (\sqrt{13}\,)^2$ und $4^2 + 1^2 = 17 = (\sqrt{17}\,)^2$ kann man $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$ und $\sqrt{17}$ konstruieren als Länge der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 2 und 1 bzw. 3 und 1 bzw. 3 un 2 bzw. 4 und 1.