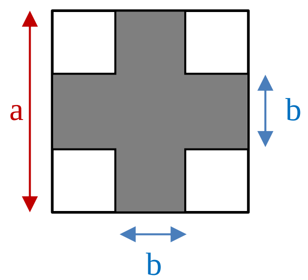
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zu quadratischen Gleichungen

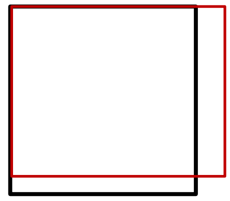
1. In ein Quadrat der Kantenlänge $a = 20cm$ ist ein graues Kreuz symmetrisch eingezeichnet.

   Wie breit ist das Kreuz, wenn der Flächeninhalt des Kreuzes 64% der Quadratfläche ausmacht?



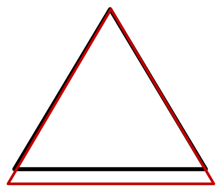
2. Bei einem Quadrat der Kantenlänge a wird eine Seite um 10% verkleinert, die andere um 8cm vergrößert.
   Das entstehende Rechteck hat einen Flächeninhalt, der um $72cm^2$ größer als der Flächeninhalt des Quadrats ist.

   Bestimme die Kantenlänge des Quadrats.



3. Vergrößert man bei einem gleichseitigen Dreieck die Seitenlänge a um 8cm, so vergrößert sich der Flächeninhalt des Dreiecks um 21%.

   Berechne die Seitenlänge a und den Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks.



4. Peter hatte für den Urlaub 672 € gespart. Nachdem sich aber die Tageskosten um 4 € erhöht hatten, musste Peter den Urlaub um 3 Tage verkürzen.

   Wie viele Tage sollte Peters Urlaub zunächst dauern?

5. Händler Meier verkauft Hemden zu einem einheitlichen Preis und macht dabei monatlich einen Umsatz von 3780 €. Herr Meier vermutet, dass er im Monat 10 Hemden mehr verkaufen kann, wenn er den Preis pro Hemd um 3 Euro verringert. Sein monatlicher Umsatz würde in diesem Fall um 168 Euro zunehmen.

   Wie viele Hemden sollte Herr Meier bei verringertem Preis dann monatlich verkaufen?

6. Herr Huber muss als Handelsvertreter lange Wegstrecken mit seinem Auto zurücklegen. Er hat sich angewöhnt, mit einer nicht zu hohen konstanten Geschwindigkeit zu fahren. Herr Huber kann für eine Wegstrecke von 330 Kilometern seine Fahrzeit um 15 Minuten verkürzen, wenn er seine übliche Reisegeschwindigkeit um 10 km/h erhöht.

   Berechne Herrn Hubers übliche Reisegeschwindigkeit.

7. Ein Kleinflugzeug fliegt mit konstanter Geschwindigkeit. Für eine Strecke von 300km benötigt es bei Gegenwind von 25 km/h um 10 Minuten länger als bei Windstille.

   Berechne die Geschwindigkeit des Flugzeugs bei Windstille.

Ergebnisse:

1. Das Kreuz hat die Breite $b = 8cm$

2. Für die Kantenlänge gibt es zwei mögliche Lösungen:
   $a_1 = 60cm$ und $a_2 = 12cm$

3. Die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks beträgt $a = 80cm$
   $$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (80cm)^2 = 1600 \cdot \sqrt{3}\ cm^2$$

4. Peters Urlaub sollte zunächst 24 Tage dauern.

5. Herr Meier könnte bei verringertem Preis dann monatlich 94 Hemden verkaufen.

6. Herrn Hubers übliche Reisegeschwindigkeit beträgt 110 km/h.

7. Die Reisegeschwindigkeit bei Windstille beträgt 225 km/h.

Mathematatik * Jahrgangsstufe 9 * Aufgaben zu quadratischen Gleichungen Lösungen

1. $a = 20\text{cm}$ und $2 \cdot a \cdot b - b^2 = 0{,}64 \cdot a^2 \Leftrightarrow 40\text{cm} \cdot b - b^2 = 0{,}64 \cdot 400\text{cm}^2 \Leftrightarrow$

   $b^2 - 40\text{cm} \cdot b + 256\,\text{cm}^2 = 0 \Leftrightarrow b_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (40\text{cm} \pm \sqrt{1600\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 256\,\text{cm}^2}) \Leftrightarrow$

   $b_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (40\text{cm} \pm \sqrt{576\,\text{cm}^2}) = \frac{1}{2} \cdot (40\text{cm} \pm 24\,\text{cm})$ und wegen $b < a = 20\text{cm}$

   $b = \frac{1}{2} \cdot 16\text{cm} = 8\text{cm}$

2. $0{,}90\,a \cdot (a + 8\text{cm}) = a^2 + 72\text{cm}^2 \Leftrightarrow 0{,}9\,a^2 + 7{,}2\text{cm} \cdot a = a^2 + 72\text{cm}^2 \Leftrightarrow$

   $0 = 0{,}1 \cdot a^2 - 7{,}2\text{cm} \cdot a + 72\text{cm}^2 \Leftrightarrow a^2 - 72\text{cm} \cdot a + 720\text{cm}^2 = 0 \Leftrightarrow$

   $a_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (72\,\text{cm} \pm \sqrt{5184\,\text{cm}^2 - 4 \cdot 720\text{cm}^2}) = \frac{1}{2} \cdot (72\,\text{cm} \pm \sqrt{2304\,\text{cm}^2})$

   $a_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (72\,\text{cm} \pm 48\,\text{cm})$; $a_1 = 60\text{cm}$ und $a_2 = 12\,\text{cm}$

3. $F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

   $\frac{\sqrt{3}}{4}(a + 8\text{cm})^2 = 1{,}21 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \Leftrightarrow (a + 8\text{cm})^2 = 1{,}21 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 + 16\text{cm} \cdot a + 64\text{cm}^2 = 1{,}21 \cdot a^2 \Leftrightarrow$

   $0 = 0{,}21 \cdot a^2 - 16\text{cm} \cdot a - 64\text{cm}^2 \Leftrightarrow a_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}21} \cdot (16\text{cm} \pm \sqrt{256\,\text{cm}^2 + 4 \cdot 0{,}21 \cdot 64\text{cm}^2}) \Leftrightarrow$

   $a_{1/2} = \frac{1}{2 \cdot 0{,}21} \cdot (16\text{cm} \pm \sqrt{309{,}76\,\text{cm}^2}) = \frac{1}{2 \cdot 0{,}21} \cdot (16\,\text{cm} \pm 17{,}6\,\text{cm})$ wegen $a > 0$ also

   $a = \frac{1}{2 \cdot 0{,}21} \cdot 33{,}6\,\text{cm} = 80\,\text{cm}$ und $F_{\Delta,\text{ursprünglich}} = \frac{\sqrt{3}}{4} 6400\,\text{cm}^2 = 1600 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}^2 \approx 2771\text{cm}^2$

4. Anzahl der Urlaubstage ursprünglich: n ; Kosten pro Tag ursprünglich: k

   $n \cdot k = 672\,€$ und $(n-3) \cdot (k + 4€) = 672\,€ \Leftrightarrow (n-3) \cdot (k + 4€) = n \cdot k \Leftrightarrow$

   $n \cdot k + 4€ \cdot n - 3k - 12€ = n \cdot k \Leftrightarrow 4€ \cdot n - 3k - 12€ = 0$ mit $k = \frac{672\,€}{n}$

   $4€ \cdot n - \frac{3 \cdot 672\,€}{n} - 12€ = 0 \Leftrightarrow 4n^2 - 12n - 2016 = 0 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 504 = 0$

   $n_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 504}) = \frac{1}{2} \cdot (3 \pm \sqrt{2025}) = \frac{1}{2} \cdot (3 \pm 45)$ wegen $n > 0$

   $n = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ Der Urlaub sollte ursprünglich also 24 Tage dauern.

5. Anzahl der ursprünglich pro Monat verkauften Hemden: n

Preis pro Hemd ursprünglich: p

$$n \cdot p = 3780\,€ \ \text{ d.h. } \ p = \frac{3780\,€}{n} \quad \text{und} \quad (n+10)\cdot(p-3€) = n\cdot p + 168\,€ \ \Leftrightarrow$$

$$n\cdot p - 3€\cdot n + 10\cdot\frac{3780\,€}{n} - 30\,€ = n\cdot p + 168\,€ \ \Leftrightarrow \ -3€\cdot n + 10\cdot\frac{3780\,€}{n} = 198\,€ \ \Leftrightarrow$$

$$0 = n^2 + 66n - 12600 = 0 \Leftrightarrow n_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-66 \pm \sqrt{4356 + 4\cdot 12600}) = \frac{1}{2}\cdot(-66 \pm \sqrt{54756})$$

$$n_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-66 \pm 234) \ \text{ wegen } \ n > 0 \ \text{ also } \ n = \frac{1}{2}\cdot(-66 + 234) = 84$$

Bei verringertem Preis kann Händler Meier also $84+10 = 94$ Hemden verkaufen.

6. Übliche Geschwindigkeit: v und übliche Reisezeit: t

$$v\cdot t = 330\,km \ \text{ d.h. } \ t = \frac{330\,km}{v} \quad \text{und} \quad (v+10\frac{km}{h})\cdot(t-15\,min) = v\cdot t \ \Leftrightarrow$$

$$v\cdot t - 0{,}25h\cdot v + 10\frac{km}{h}\cdot\frac{330\,km}{v} - 10\frac{km}{h}\cdot 0{,}25h = v\cdot t \ \Leftrightarrow$$

$$-v + \frac{3300\,km^2}{0{,}25\cdot h^2\cdot v} - 10\frac{km}{h} = 0 \ \Leftrightarrow \ 0 = v^2 + 10\frac{km}{h}\cdot v - \frac{13200\,km^2}{h^2} \ \Leftrightarrow$$

$$v_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(-10\frac{km}{h} \pm \sqrt{100\frac{km^2}{h^2} + 4\cdot\frac{13200\,km^2}{h^2}}) = \frac{1}{2}\cdot(-2{,}5\frac{km}{h} \pm \sqrt{52900\frac{km^2}{h^2}})$$

$$\text{wegen } \ v>0 \ \text{ also } \ v = \frac{1}{2}\cdot(-10\frac{km}{h} + 230\frac{km}{h}) = 110\frac{km}{h}$$

7. Geschwindigkeit bei Windstille: v und Reisezeit bei Windstille: t

$$v\cdot t = 300\,km \ \text{ d.h. } \ t = \frac{300\,km}{v} \quad \text{und} \quad (v-25\frac{km}{h})\cdot(t+10\,min) = v\cdot t \ \Leftrightarrow$$

$$v\cdot t + \frac{1}{6}h\cdot v - 25\frac{km}{h}\cdot\frac{300\,km}{v} - 25\frac{km}{h}\cdot\frac{1}{6}h = v\cdot t \ \Leftrightarrow$$

$$v - 25\frac{km}{h}\cdot\frac{300\,km}{v}\cdot\frac{6}{h} - 25\frac{km}{h} = 0 \ \Leftrightarrow \ v^2 - 25\frac{km}{h}\cdot v - 45000\frac{km^2}{h^2} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$v_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(25\frac{km}{h} \pm \sqrt{625\frac{km^2}{h^2} + 4\cdot 45000\frac{km^2}{h^2}}) = \frac{1}{2}\cdot(25\frac{km}{h} \pm \sqrt{180625\frac{km^2}{h^2}})$$

$$\text{wegen } \ v > 0 \ \text{ also } \ v = \frac{1}{2}\cdot(25\frac{km}{h} + 425\frac{km}{h}) = 225\frac{km}{h}$$