

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Gleichungen

Die meisten der folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Bestimme jeweils die Lösungsmenge!

Gib die Lösungen zuerst exakt und – falls sie irrational sind – mit dem Taschenrechner auf Hundertstel gerundet an.

Beachte:

Forme erst in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ um und wende dann gegebenenfalls die

Mitternachtsformel an:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \right)$$

1. $2x^2 - 5 = x$

2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32$

4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2$

5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2$

6. $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x}$

7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0$

8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6$

9. $x^4 - x^2 = 12$

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0$

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5$



Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Gleichungen * Lösungen:

1. $2x^2 - 5 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{4} \left(1 \pm \sqrt{1+40} \right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$
 $x_1 \approx 1,85$; $x_2 \approx -1,35$

2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 5x = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 5 = 0$
 $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot (17 \pm \sqrt{209})$; $x_1 \approx 3,93$; $x_2 \approx 0,32$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32 \mid \cdot 6x \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 192x \Leftrightarrow 4x^2 - 192x - 9 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1}{8} \cdot (192 \pm \sqrt{37008}) = 24 \pm \frac{3}{2} \cdot \sqrt{257}$; $x_1 \approx 48,05$; $x_2 \approx -0,05$

4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 13x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{13}$
 Dies ist eigentlich keine quadratische Gleichung!

5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$

6. $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x} \mid \cdot 3x^2 \Leftrightarrow 3 - 2x^2 = 12x \Leftrightarrow 2x^2 + 12x - 3 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = -3 \pm \frac{\sqrt{42}}{2}$; $x_1 \approx 0,24$; $x_2 \approx -6,24$

7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0 \Leftrightarrow 2x-3=0$ oder $4x+5=0 \Leftrightarrow x_1 = 1,5$; $x_2 = -1,25$

8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 15 = 6 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 21 = 0 \Leftrightarrow$
 $x_{1/2} = \frac{1}{16} \cdot (2 \pm \sqrt{676}) = \frac{1}{8} \cdot (1 \pm 13)$; $x_1 = 1,75$; $x_2 = -1,5$

9. $x^4 - x^2 = 12$ mit $u=x^2 \Leftrightarrow u^2 - u - 12 = 0 \Leftrightarrow (u-4) \cdot (u+3) = 0 \Leftrightarrow u_1 = 4$; $u_2 = -3$
 $x^2 = 4$ hat die Lösungen $x_{1/2} = \pm 2$; $x^2 = -3$ hat keine Lösung!

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ mit $x^2 = u \Leftrightarrow 2u^2 - 3u - 4 = 0 \Leftrightarrow u_{1/2} = \frac{1}{4} \cdot (3 \pm \sqrt{41})$
 nur zu $u_1 > 0$ gibt es für $x^2 = u$ Lösungen: $x_{1/2} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{41}} \approx \pm 1,53$

11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (4x^2 - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \approx \pm 0,59$

Das ist keine quadratische Gleichung sondern eine Gleichung dritten Grades (wegen x^3)!
 Allerdings „enthält“ sie eine quadratische Gleichung, nämlich $4x^2 - \sqrt{2} = 0$.

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5 \mid \cdot (2+x) \cdot (4-x) \Leftrightarrow (4-x) - 3 \cdot (2+x) = 5 \cdot (8+2x-x^2) \Leftrightarrow$
 $x^2 - 14x - 42 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (14 \pm \sqrt{364}) = 7 \pm \sqrt{91} \Leftrightarrow x_1 \approx 16,54$; $x_2 \approx -2,54$

