Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Gleichungen

Die meisten der folgenden Gleichungen lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Bestimme jeweils die Lösungsmenge!

Gib die Lösungen zuerst exakt und – falls sie irrational sind – mit dem Taschenrechner auf Hundertstel gerundet an.

Beachte:

Forme erst in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ um und wende dann gegebenenfalls die Mitternachtsformel an: $x_{1/2} = \frac{1}{2a} \cdot \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} \right)$

1. $2x^2 - 5 = x$
2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x$
3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32$
4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2$
5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2$
6. $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x}$
7. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 0$
8. $(2x-3) \cdot (4x+5) = 6$
9. $x^4 - x^2 = 12$
10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
11. $4x^3 - \sqrt{2} \cdot x = 0$
12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5$

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Quadratische Gleichungen * Lösungen:

1. $2x^2 - 5 = x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - x - 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{1+40}\right) = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{41}}{4}$

   $x_1 \approx 1{,}85 \;;\; x_2 \approx -1{,}35$

2. $(2x-3)^2 - 4 = 5x \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 12x + 9 - 4 - 5x = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 17x + 5 = 0$

   $x_{1/2} = \frac{1}{8}\cdot\left(17 \pm \sqrt{209}\right) \;;\; x_1 \approx 3{,}93 \;;\; x_2 \approx 0{,}32$

3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2x} = 32 \;\Big|\cdot 6x \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 9 = 192x \;\Leftrightarrow\; 4x^2 - 192x - 9 = 0 \;\Leftrightarrow$

   $x_{1/2} = \frac{1}{8}\cdot\left(192 \pm \sqrt{37008}\right) = 24 \pm \frac{3}{2}\cdot\sqrt{257} \;;\; x_1 \approx 48{,}05 \;;\; x_2 \approx -0{,}05$

4. $(x-3)^2 - (x-3) = (x+3)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 7x + 12 = x^2 + 6x + 9 \;\Leftrightarrow\; 13x = 3 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{3}{13}$

   Dies ist eigentlich keine quadratische Gleichung!

5. $2x^2 + 3x + 4 = (x+2)^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot(x-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;;\; x_2 = 1$

6. $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{3} = \frac{4}{x} \;\Big|\cdot 3x^2 \;\Leftrightarrow\; 3 - 2x^2 = 12x \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 12x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow$

   $x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = -3 \pm \frac{\sqrt{42}}{2};\quad x_1 \approx 0{,}24 \;;\; x_2 \approx -6{,}24$

7. $(2x-3)\cdot(4x+5) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x - 3 = 0 \text{ oder } 4x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1{,}5 \;;\; x_2 = -1{,}25$

8. $(2x-3)\cdot(4x+5) = 6 \;\Leftrightarrow\; 8x^2 - 2x - 15 = 6 \;\Leftrightarrow\; 8x^2 - 2x - 21 = 0 \;\Leftrightarrow$

   $x_{1/2} = \frac{1}{16}\cdot\left(2 \pm \sqrt{676}\right) = \frac{1}{8}\cdot(1 \pm 13) \;;\; x_1 = 1{,}75 \;;\; x_2 = -1{,}5$

9. $x^4 - x^2 = 12 \text{ mit } u = x^2 \;\Leftrightarrow\; u^2 - u - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; (u-4)\cdot(u+3) = 0 \;\Leftrightarrow\; u_1 = 4 \,;\, u_2 = -3$

   $x^2 = 4 \text{ hat die Lösungen } x_{1/2} = \pm 2 \;;\; x^2 = -3 \text{ hat keine Lösung!}$

10. $2x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \text{ mit } x^2 = u \;\Leftrightarrow\; 2u^2 - 3u - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; u_{1/2} = \frac{1}{4}\cdot\left(3 \pm \sqrt{41}\right)$

    nur zu $u_1 > 0$ gibt es für $x^2 = u$ Lösungen: $x_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3 + \sqrt{41}} \approx \pm 1{,}53$

11. $4x^3 - \sqrt{2}\cdot x = 0 \;\Leftrightarrow\; x\cdot\left(4x^2 - \sqrt{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \,;\, x_{2/3} = \pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}59$

    Das ist keine quadratische Gleichung sondern eine Gleichung dritten Grades (wegen x^3)!
    Allerdings „enthält“ sie eine quadratische Gleichung, nämlich $4x^2 - \sqrt{2} = 0$.

12. $\frac{1}{2+x} - \frac{3}{4-x} = 5 \;\Big|\cdot(2+x)\cdot(4-x) \;\Leftrightarrow\; (4-x) - 3\cdot(2+x) = 5\cdot\left(8 + 2x - x^2\right) \;\Leftrightarrow$

    $5x^2 - 14x - 42 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{10}\cdot\left(14 \pm \sqrt{1036}\right) = 1{,}4 \pm 0{,}2\cdot\sqrt{259} \;\Leftrightarrow$

    $x_1 \approx 4{,}62 \,;\, x_2 \approx -1{,}82$