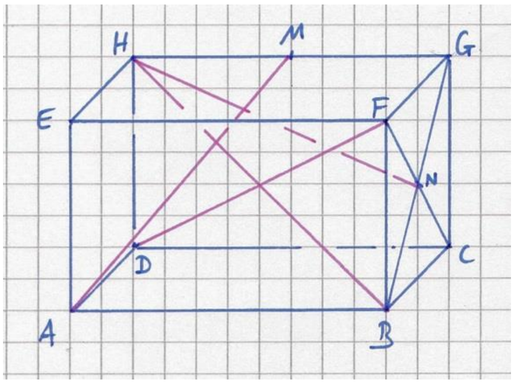
Mathematik * Jahrgangsstufe 9
Anspruchsvollere Aufgaben zu Sinus, Kosinus und Tangens

1. Das Bild zeigt den Quader ABCDEFGH mit den Kantenlängen $\overline{AB} = 5$, $\overline{AE} = 3$ und $\overline{AD} = 2$. M halbiert [HG] und N ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck BCGF.

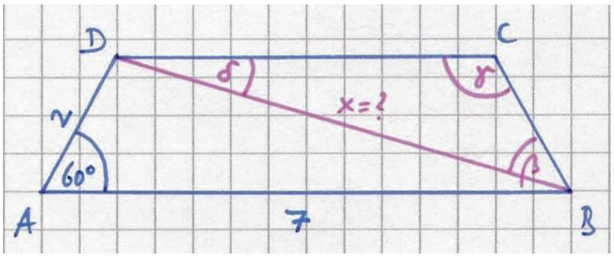


   a) Begründe jeweils, dass sich die beiden Geraden schneiden und bestimme den jeweiligen Schnittwinkel.
   a1) AM und HB a2) AM und HN
   a3) DF und HB

   b) Bestimme alle Innenwinkel und alle Seitenlängen im Dreieck ANM.

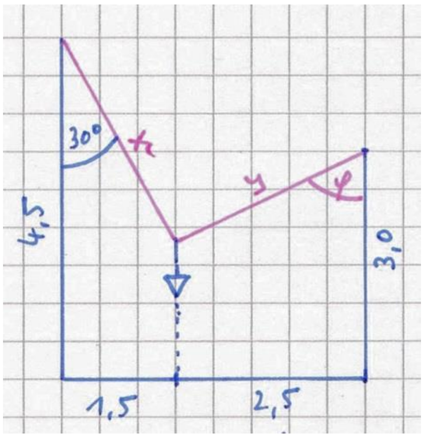
2. Im abgebildeten gleichschenkligen Trapez ABCD sind die Seitenlängen $\overline{AB} = 7$ und $\overline{AD} = 2$ sowie der Innenwinkel von 60^o bei A bekannt.

   Bestimme alle Innenwinkel im Dreieck DBC sowie die Seitenlänge $x = \overline{DB}$.



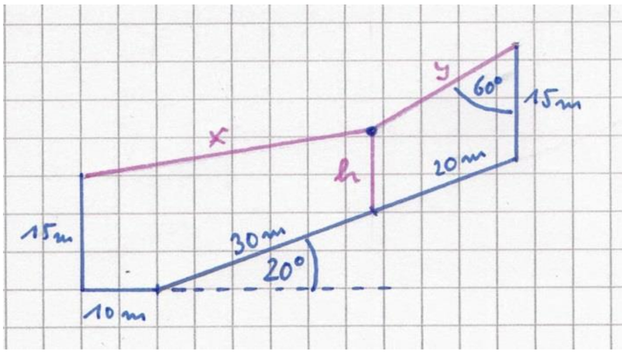
3. Ein Lot hängt an einem Seil der Länge x + y. Das Seil ist an zwei Pfosten befestigt, die 4,5m bzw. 3,0m hoch sind. Das Lot befindet sich 1,5m rechts vom linken Pfosten entfernt. Der Winkel zwischen dem linken Pfosten und dem Seil beträgt 30^o (siehe Bild!).

   Bestimme den Winkel φ und die gesamte Seillänge.

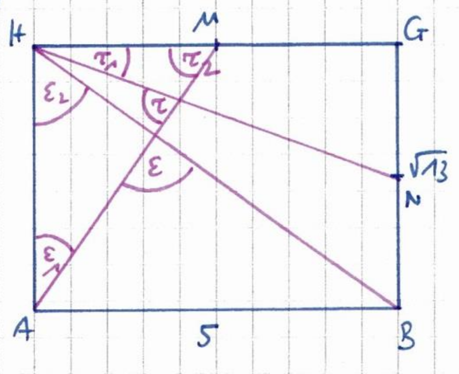


4. Die Gondel einer Seilbahn hängt an einem Seil der Länge x + y. Die Stützpfeiler der Seilbahn haben eine Höhe von 15m. Weitere Abmessungen und Winkel sind der Abbildung zu entnehmen.

   Bestimme die Höhe h und die gesamte Seillänge.



1. Die Geraden AM, HB, HN liegen im Rechteck ABGH und schneiden sich daher.
Die Geraden HB und DF liegen im Rechteck DBFH.



$\overline{AH} = \overline{BG} = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$\overline{DB} = \overline{HF} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

a1) $\tan\varepsilon_1 = \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{13}} \Rightarrow \varepsilon_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}5}{\sqrt{13}}\right) = 34{,}736...° \approx 34{,}7°$

$\tan\varepsilon_2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AH}} = \frac{5}{\sqrt{13}} \Rightarrow \varepsilon_2 = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{13}}\right) = 54{,}204...° \approx 54{,}2°$

$\Rightarrow$ Schnittwinkel $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 88{,}9°$

a2) $\tau_2 + \varepsilon_1 = 90° \Rightarrow \tau_2 \approx 90° - 34{,}7° = 55{,}3°$

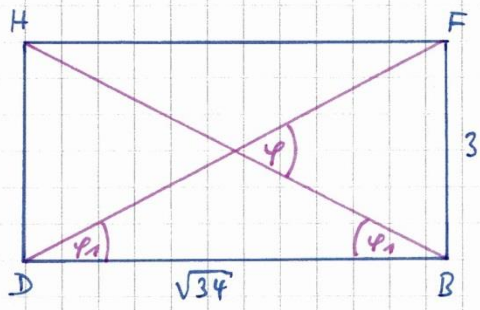
$\tan\tau_1 = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{13}}{5} \Rightarrow \tau_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{13}}{10}\right) = 19{,}827...° \approx 19{,}8°$

Schnittwinkel $\tau = \tau_1 + \tau_2 = 53{,}3° + 19{,}8° = 73{,}1°$

a3) $\tan\varphi_1 = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right) \approx 27{,}2°$

$\varphi = 2\cdot\varphi_1 \approx 54{,}5°$



2.

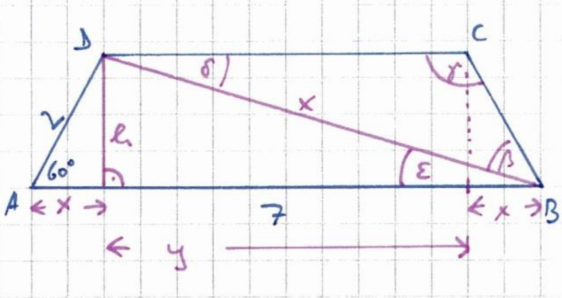
$\frac{x}{2} = \cos 60° \Rightarrow$

$x = 2\cdot\cos 60° = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$y = 7 - 2\cdot x = 5$

$\frac{h}{2} = \sin 60° \Rightarrow$

$h = 2\cdot\sin 60° = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3}$



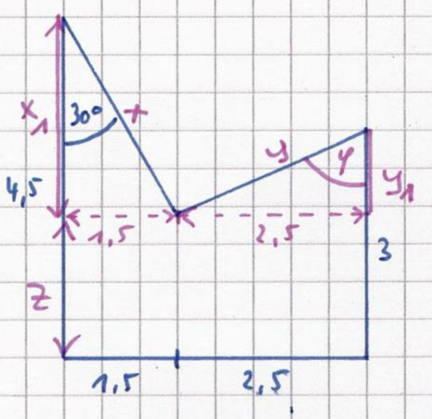
$\tan\varepsilon = \frac{h}{y-x} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \varepsilon = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right) = 16{,}10...° \approx 16{,}1°$

$\delta = \varepsilon \approx 16{,}1°$ (Z-Winkel) ; $\varepsilon + \beta = 60° \Rightarrow \beta = 60° - 16{,}1° = 43{,}9°$

$\beta + \delta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - 43{,}9° - 16{,}1° = 120°$

$x^2 = h^2 + (y-x)^2 \Rightarrow x = \sqrt{3 + 6^2} = \sqrt{39}$

3.



$\tan 30° = \frac{1{,}5}{x_1} \Rightarrow$

$x_1 = \frac{1{,}5}{\tan 30°} = \frac{1{,}5}{\frac{1}{3}\sqrt{3}} = 1{,}5\sqrt{3}$

$\frac{x_1}{x} = \cos 30° \Rightarrow x = \frac{x_1}{\cos 30°} = \frac{1{,}5\sqrt{3}}{0{,}5\sqrt{3}} = 3$

oder $x_1^2 + 1{,}5^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2{,}25 + 3 \cdot 2{,}25} = 3$

$y_1 = 3 - z = 3 - (4{,}5 - x_1) = x_1 - 1{,}5$

$y_1 = 1{,}5\sqrt{3} - 1{,}5 = 1{,}5 \cdot (\sqrt{3} - 1)$

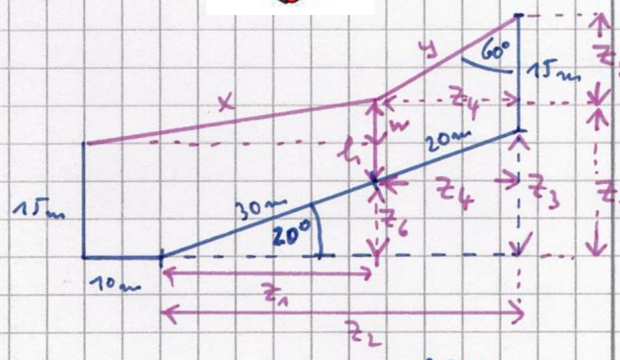
$\tan \varphi = \frac{2{,}5}{y_1} = \frac{2{,}5}{1{,}5(\sqrt{3}-1)} = \frac{5}{3(\sqrt{3}-1)} \Rightarrow \varphi = 66{,}287\ldots° \approx 66{,}3°$

$y^2 = y_1^2 + 2{,}5^2 \Rightarrow y = \sqrt{2{,}25 \cdot (3 - 2\sqrt{3} + 1) + 2{,}5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{61 - 18\sqrt{3}}$

$y \approx 2{,}73$

$x + y \approx 3 + 2{,}73 = 5{,}73$

4.



$\cos 20° = \frac{z_1}{30\,m} \Rightarrow$

$z_1 = 30\,m \cdot \cos 20° \approx 28{,}191\,m$

$z_2 = 50\,m \cdot \cos 20° \approx 46{,}985\,m$

$\frac{z_3}{50\,m} = \sin 20° \Rightarrow$

$z_3 = 50\,m \cdot \sin 20° \approx 17{,}101\,m$

$z_4 = z_2 - z_1 \approx 18{,}794\,m \qquad \frac{z_4}{z_5} = \tan 60° \Rightarrow z_5 \approx \frac{18{,}794\,m}{\tan 60°} \approx 10{,}851\,m$

$\sin 20° = \frac{z_6}{30\,m} \Rightarrow z_6 = 30\,m \cdot \sin 20° \approx 10{,}261\,m$

$z_7 + z_5 = z_3 + 15\,m \Rightarrow z_7 \approx 17{,}101\,m + 15\,m - 10{,}851\,m = 21{,}250\,m$

$h + z_6 = z_7 \Rightarrow h = z_7 - z_6 \approx 21{,}250\,m - 10{,}261\,m = 10{,}989\,m$

$\frac{z_4}{y} = \sin 60° \Rightarrow y = \frac{z_4}{\sin 60°} \approx \frac{18{,}794\,m}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \approx 21{,}701\,m$

$15\,m + w = h + z_6 \Rightarrow w \approx 10{,}989\,m + 10{,}261\,m - 15\,m \approx 6{,}250\,m$

$x^2 = (10\,m + z_1)^2 + w^2 \Rightarrow x \approx \sqrt{(38{,}191\,m)^2 + (6{,}250\,m)^2} \approx 38{,}699\,m$

Seillänge $x + y \approx 21{,}701\,m + 38{,}699\,m = 60{,}40\,m$

und $h \approx 10{,}99\,m$