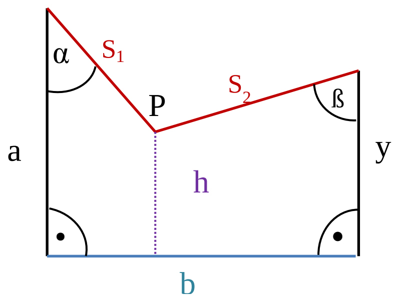
Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Sinus, Kosinus und Tangens

1. Im Bild sind folgende Größen bekannt:
   $a = 3{,}20\text{m}$, $b = 4{,}00\text{m}$, $\alpha = 40{,}0^\circ$,
   $s_1 = 2{,}00\text{m}$, $s_2 = 3{,}00\text{m}$.

   h ist der Abstand des Punktes P von der Grundlinie b.

   a) Fertige möglichst genau eine Zeichnung im Maßstab 1 : 50 an.

   b) Bestimme mit geeigneter Rechnung die Längen h und y auf Zentimeter und den Winkel ß auf $0{,}1^\circ$ genau.

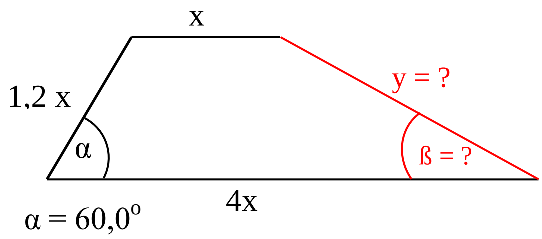


Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!

2. In abgebildeten Trapez gilt $\alpha = 60^\circ$.
   bekannt:

   a) Fertige möglichst genau für $x = 2{,}0\text{cm}$ eine maßstäbliche Zeichnung an.

   b) Bestimme mit geeigneter Rechnung ß auf $0{,}1^\circ$ genau und bestimme die Länge von y in Abhängigkeit von x.



Die Zeichnung ist nicht maßstabsgetreu!

3. Für bestimmte Winkel ß lassen sich die Werte sin(ß), cos(ß) und tan(ß) exakt angeben. Betrachte dazu ein Quadrat (mit Diagonale) und ein gleichseitiges Dreieck (mit Höhe). Ergänze nun nach geeigneter Überlegung die folgende Tabelle!

Winkel ß	0°	30°	45°	60°	90°
sin (ß)	0				1
cos(ß)	1				0
tan (ß)	0				-

4. Begründe folgende Gleichungen für $0 < \alpha < 90^\circ$.

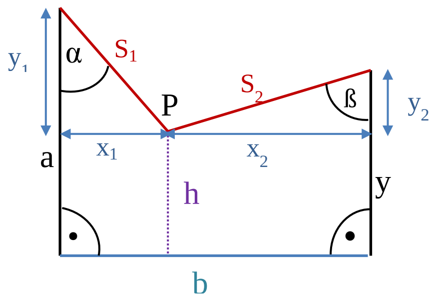
   a) $\sin(90-\alpha) = \cos(\alpha)$ und $\cos(90-\alpha) = \sin(\alpha)$

   b) $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$ und $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos(\alpha)^2}$

   c) $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ und $\cos(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\tan(\alpha))^2}}$

Mathematik * Jahrgangsstufe 9 * Sinus, Kosinus und Tangens * Lösungen

1. Im Bild sind folgende Größen bekannt:
   $a = 3{,}20m$, $b = 4{,}00m$, $\alpha = 40{,}0^o$,
   $s_1 = 2{,}00m$, $s_2 = 3{,}00m$.



b)

$$y_1 = s_1 \cdot \cos\alpha = 2{,}00m \cdot \cos 40{,}0^o = 1{,}53m$$

$$x_1 = s_1 \cdot \sin\alpha = 2{,}00m \cdot \sin 40{,}0^o = 1{,}29m$$

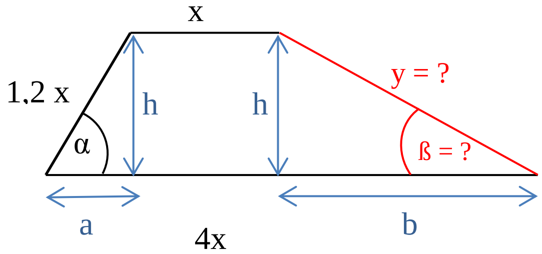
$$h = a - y_1 = 3{,}20m - 1{,}53m = 1{,}67m$$

$$x_2 = b - x_1 = 4{,}00m - 1{,}29m = 2{,}71m\ ;$$

$$y_2 = \sqrt{{s_2}^2 - {x_2}^2} = \sqrt{3{,}00^2 - 2{,}71^2}\ m = 1{,}29m$$

$$y = h + y_2 = 1{,}67m + 1{,}29m = 2{,}96m\ ;\ y_2 = s_2 \cdot \cos ß \Rightarrow ß = \cos^{-1}(\frac{1{,}29}{3{,}00}) = 64{,}5^o$$

2. b) $\alpha = 60{,}0^o$



$$a = 1{,}2x \cdot \cos\alpha = 1{,}2x \cdot \cos 60{,}0^o = 0{,}60x$$

$$b = 4x - a - x = 3x - 0{,}60x = 2{,}4x$$

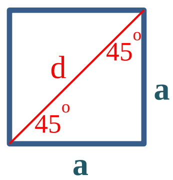
$$h = 1{,}2x \cdot \sin\alpha = 1{,}2x \cdot \sin 60{,}0^o = 0{,}6 \cdot \sqrt{3}\ x$$

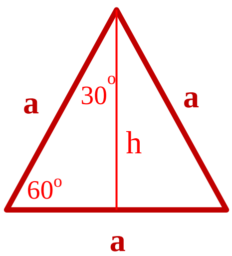
$$y = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{(0{,}6 \cdot \sqrt{3})^2 + 2{,}4^2} \cdot x =$$

$$0{,}6 \cdot \sqrt{19}\, x \approx 2{,}62\, x$$

$$\tan ß = \frac{h}{b} \Rightarrow ß = \tan^{-1}(\frac{0{,}6 \cdot \sqrt{3} \cdot x}{2{,}4x}) = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{4}) = 23{,}4^o$$

3.





$$\text{im Quadrat gilt: } d = \sqrt{2} \cdot a$$

$$\sin 45^o = \cos 45^o = \frac{a}{d} = \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^o = \frac{a}{a} = 1$$

$$\text{im gleichseitigen Dreieck gilt: } h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

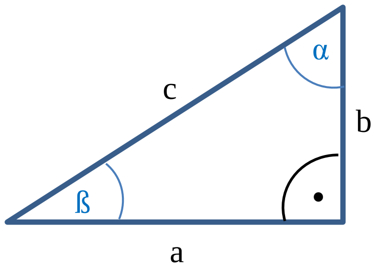
$$\sin 60^o = \cos 30^o = \frac{h}{a} = \frac{0{,}5 \cdot \sqrt{3} \cdot a}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{und} \quad \sin 30^o = \cos 60^o = \frac{0{,}5 \cdot a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{0{,}5a}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{und} \quad \tan 60^o = \frac{h}{0{,}5a} = \sqrt{3}$$

Winkel ß	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin (ß)	0	0,5	$0{,}5 \cdot \sqrt{2}$	$0{,}5 \cdot \sqrt{3}$	1
cos(ß)	1	$0{,}5 \cdot \sqrt{3}$	$0{,}5 \cdot \sqrt{2}$	0,5	0
tan (ß)	0	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

4. a) $\sin(90-\alpha) = \sin(ß) = \dfrac{b}{c} = \cos(\alpha)$

$\cos(90-\alpha) = \cos(ß) = \dfrac{a}{c} = \sin(\alpha)$



b) $a^2 + b^2 = c^2 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{a^2}{c^2} + \dfrac{b^2}{c^2} = \dfrac{c^2}{c^2} \;\Leftrightarrow$

$(\dfrac{a}{c})^2 + (\dfrac{b}{c})^2 = 1^2 \;\Leftrightarrow\; (\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$

also auch $(\sin(\alpha))^2 = 1 - (\cos(\alpha))^2 \;\Rightarrow\; \sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2}$

c) $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \dfrac{a/c}{b/c} = \dfrac{a}{b} = \tan(\alpha)$ und damit

$1 + (\tan\alpha)^2 = 1 + \dfrac{(\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \dfrac{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2} = \dfrac{1}{(\cos\alpha)^2} \;\Rightarrow$

$(\cos\alpha)^2 = \dfrac{1}{1 + (\tan(\alpha))^2}$ und $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + (\tan(\alpha))^2}}$