Q11 * Mathematik * Permutationen und Teilmengen

Permutationen

Der Mathekurs zählt 20 Schüler. Der Mathelehrer stellt die 20 Schüler in einer Reihe – alphabetisch sortiert nach den Anfangsbuchstaben der Nachnamen – auf .
Der Sportlehrer stellt die 20 Schüler dagegen der Größe nach sortiert in einer Reihe auf.

a) Wie viele unterschiedliche Reihenfolgen des Aufstellens gibt es?
b) Wie lange dauert es, bis alle diese Aufstellungen durchexerziert sind, wenn die Klasse in einer Sekunde 10 verschiedene Aufstellungen schafft?

Anzahl der Teilmengen

Der Sportlehrer wählt aus der Klasse 9b mit insgesamt 20 Schülern für einen Wettkampf genau 12 Schüler aus.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?
b) Beim Wettkampf müssen von den 12 Mannschaftsmitgliedern 8 für den Anfangseinsatz ausgewählt werden. Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es dafür?

Merke:

Eine Menge aus n Elementen kann man auf $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ (n – Fakultät) verschiedene Möglichkeiten anordnen.
(Eine Umordnung von n Elementen nennt man auch **Permutation** der n Elemente.)

Aus einer Menge mit n Elementen kann man Teilmengen mit genau k Elementen $(k \leq n)$ auf genau $\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ verschiedene Arten auswählen.

Für $\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ schreibt man auch $\binom{n}{k}$ und sagt dazu "n über k" oder "k aus n".

Man sagt: Aus einer Menge mit n Elementen kann man $\binom{n}{k}$ verschiedene Teilmengen mit genau k Elementen auswählen.

Aufgaben:

Prüfe jeweils, ob du besser mit einem Baumdiagramm oder den angegebenen Formeln arbeitest.

1. Beim Zahlenlotto werden 6 aus 49 Ziffern angekreuzt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
2. Bei einem privaten Tanz-Abend sind 5 Paare anwesend. Es gibt Damenwahl. Wie viele unterschiedlichen Möglichkeiten für die Paarungen gibt es?
3. Bei einem Pferderennen sind 12 Pferde am Start. Bei der Dreier-Wette muss man die ersten drei Pferde in der richtigen Reihenfolge tippen.
   Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es für diesen Dreier-Tipp?
4. In einer Losurne befinden sich 100 Lose.
   90 Lose sind Nieten, 10 dagegen ergeben einen Gewinn. Hans zieht 5 Lose.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Hans
   a) keinen Gewinn? b) mindestens einen Gewinn?
   c) genau ein Gewinnlos? d) mehr als ein Gewinnlos?
5. Peter zieht aus einem Stapel Karten (32 Karten mit den bekannten Werten) 5 Karten heraus.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er
   a) 5 Herzkarten b) kein Ass c) nur Figuren (Buben, Damen, Könige)?
6. Paul zieht aus einem Stapel Karten (32 Karten mit den bekannten Werten) 5 Karten heraus.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er
   a) mit der ersten Karte ein Ass? b) mit der letzten Karte kein Herz?
7. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit beim Wurf mit 6 Würfeln keine einzige 6 zu würfeln?
8. Wie viele Möglichkeiten gibt es für einen Fußballtrainer, aus 23 Aktiven eine Mannschaft mit 11 Spielern auszuwählen?

Q11 * Mathematik * Permutationen und Teilmengen * Lösungen

1. Es gibt $\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13983816$ Möglichkeiten. (TR: 49 **nCr** 6)

2. Es gibt $5! = 120$ Möglichkkeiten.

3. Es gibt $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ Möglichkeiten. Man kann diese Anzahl auch noch so berechnen:
$\binom{12}{3} \cdot 3! = 220 \cdot 6 = 1320$; (TR: 49 **nPr** 6)

   Wähle zuerst 3 der 12 Pferde aus (es gibt $\binom{12}{3} = 220$ Möglichkeiten) und ordne sie dann auf $3! = 6$ Arten an.

4. a) $\dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 58{,}4\%$ b) $1 - P(\text{"kein Gewinn"}) = 1 - \dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} \approx 41{,}6\%$

   c) $\dfrac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 33{,}9\%$ d) $1 - \dfrac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}} - \dfrac{\binom{10}{1} \cdot \binom{90}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 41{,}6\% - 33{,}9\% = 7{,}7\%$

5. a) $\dfrac{\binom{8}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 0{,}03\%$ b) $\dfrac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 48{,}4\%$ c) $\dfrac{\binom{12}{5}}{\binom{32}{5}} \approx 0{,}4\%$

6. a) $\dfrac{\binom{4}{1}}{\binom{32}{1}} = 12{,}5\%$ b) $\dfrac{\binom{24}{1}}{\binom{32}{1}} = 75\%$

7. $\left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{5^6}{6^6} \approx 33{,}5\%$

8. $\binom{23}{11} = 1352078$ (wobei Torwart und Feldspieler nicht unterschieden werden)