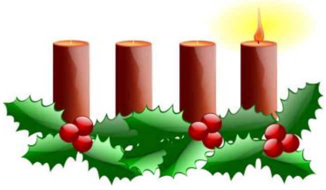
Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt.



a) $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$

b) $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

2. Wo ist die Funktion f streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter $k \in \mathbb{R}$ ab?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b) $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Graph von f einen Terrassenpunkt besitzt.

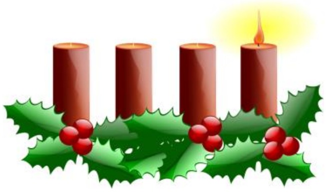
a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion f streng monoton steigt.



a) $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$

b) $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

2. Wo ist die Funktion f streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter $k \in \mathbb{R}$ ab?

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b) $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Graph von f einen Terrassenpunkt besitzt.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

Q11 * Mathematik * Anwendungen der Ableitung * Lösung

1. a) $f(x) = \frac{1}{30}\cdot(x^3 - 6x^2 - 15x + 20) \;\Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{30}\cdot(3x^2 - 12x - 15) = \frac{1}{10}(x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{10}\cdot(x-5)\cdot(x+1)$

d.h. $f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \in R \setminus]-1\,;5\,[$

Die Funktion f ist also in den beiden Intervallen $]-\infty; -1]$ und $[5\,;\infty\,[$ streng monoton steigend.

b) $f(x) = \frac{1}{120}\cdot(6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x) \;\Rightarrow$

$f'(x) = \frac{1}{120}\cdot(24x^3 - 24x^2 - 90x + 108) = \frac{1}{20}\cdot(4x^3 - 4x^2 - 15x + 18)$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0$ Durch Probieren Lösung $x_1 = -2$ gefunden!

$(4x^3 - 4x^2 - 15x + 18):(x+2) = 4x^2 - 12x + 9$ also $f'(x) = \frac{1}{20}(x+2)\cdot(4x^2 - 12x + 9)$

Weitere Faktorisierung mit Hilfe der Mitternachtsformel: $4x^2 - 12x + 9 = 4\cdot(x - 1{,}5)^2$

$f'(x) = \frac{1}{5}(x+2)\cdot(x-1{,}5)^2$ also $f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2$

f ist streng monoton steigend im Intervall $[-2\,;\infty\,[$
(mit einem Terrassenpunkt (1,5 / 0,534375))

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{(x^2+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -x^2 + 2x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(2 \pm \sqrt{4+4}) = 1 \pm \sqrt{2}$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [\,1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\,]$

f ist also im Intervall $[\,1-\sqrt{2}\,;\,1+\sqrt{2}\,]$ streng monoton steigend.

2. a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k\cdot x \;\Rightarrow\; f'(x) = x^2 - 4x + k \;\Rightarrow$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x + k = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{2}\cdot(4 \pm \sqrt{16-4k}) = 2 \pm 2\cdot\sqrt{4-k}$ falls $k \leq 4$

f ist streng monoton fallend im Intervall $[\,x_2\,;\,x_1\,]$, falls $k < 4$

b) $f(x) = k\cdot x^3 - 6x^2 - 3x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3kx^2 - 12x - 3 = 3\cdot(kx^2 - 4x - 1)$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; kx^2 - 4x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{2k}\cdot(4 \pm \sqrt{16-4k}) = \frac{1}{k}\cdot(2 \pm \sqrt{4-k})$

$x_{1/2} = \frac{1}{2k}\cdot(4 \pm \sqrt{16-4k}) = \frac{1}{k}\cdot(2 \pm \sqrt{4-k})$ falls $k < 4$ und $k \neq 0$

Für $0 < k < 4$ gilt $f'(x) \leq 0$ im Intervall $[\,x_2\,;\,x_1\,]$ und f ist damit streng monoton fallend in $[\,x_2\,;\,x_1\,]$. Für $k < 0$ gilt $f'(x) \geq 0$ im Intervall $[\,x_2\,;\,x_1\,]$ und daher ist für $k < 0$ f streng monoton fallend in den Intervallen $]-\infty; x_2\,]$ und $[\,x_1\,;\infty\,[$.

3. Für einen Terrassenpunkt benötigt man hier jeweils eine doppelte Nullstelle der Ableitung!
Für eine quadratische Gleichung bedeutet dies, dass die zugehörige Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ den Wert 0 haben muss, denn dann stimmen die beiden Lösungen x_1 und x_2 überein.

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3kx^2 + 4x = x\cdot(x^2 - 3kx + 4)$

Für $x^2 - 3kx + 4 = 0$ muss $D = 9k^2 - 4\cdot1\cdot4 = 0$ gelten! D.h. $k_{1/2} = \pm\frac{4}{3}$.

Für $k_1 = \frac{4}{3}$ gilt $f'(x) = x\cdot(x^2 - 4x + 4) = x\cdot(x-2)^2$ und $(2/\frac{4}{3})$ ist Terrassenpunkt.

für $k_1 = -\frac{4}{3}$ gilt $f'(x) = x\cdot(x^2 + 4x + 4) = x\cdot(x+2)^2$ und $(-2/\frac{4}{3})$ ist Terrassenpunkt..

b) $f(x) = 0{,}5x^4 + kx^3 + 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 3kx^2 + 18x = x\cdot(2x^2 + 3kx + 18)$

Für $2x^2 + 3kx + 18 = 0$ muss $D = 9k^2 - 4\cdot2\cdot18 = 0$ gelten! D.h. $k_{1/2} = \pm 4$.

Für $k_1 = 4$ gilt $f'(x) = x\cdot(2x^2 + 12x + 18) = 2x\cdot(x^2 + 6x + 9) = 2x\cdot(x+3)^2$ und $(-3/13{,}5)$ ist damit ein Terrassenpunkt.

Für $k_2 = -4$ gilt $f'(x) = x\cdot(2x^2 - 12x + 18) = 2x\cdot(x^2 - 6x + 9) = 2x\cdot(x-3)^2$ und $(3/13{,}5)$ ist damit ein Terrassenpunkt.

c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + k\cdot x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + k$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + k = 0$ und es muss gelten: $D = 12^2 - 4\cdot3\cdot k = 0$,

d.h. $k = 12$ und $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3\cdot(x^2 + 4x + 4) = 3\cdot(x+2)^2$

Für $k = 12$ liegt damit bei $(-2/-5)$ ein Terrassenpunkt vor.