

## Q11 \* Mathematik \* Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion  $f$  streng monoton steigt.

a)  $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$

b)  $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$



2. Wo ist die Funktion  $f$  streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter  $k \in \mathbb{R}$  ab?

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b)  $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters  $k$  so, dass der Graph von  $f$  einen Terrassenpunkt besitzt.

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

b)  $f(x) = 0,5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

## Q11 \* Mathematik \* Anwendungen der Ableitung

1. Bestimmen Sie alle Intervalle, in denen die Funktion  $f$  streng monoton steigt.

a)  $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20)$

b)  $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x)$

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$



2. Wo ist die Funktion  $f$  streng monoton fallend und wie hängt dies vom Parameter  $k \in \mathbb{R}$  ab?

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + k \cdot x$

b)  $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x$

3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters  $k$  so, dass der Graph von  $f$  einen Terrassenpunkt besitzt.

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2$

b)  $f(x) = 0,5x^4 + kx^3 + 9x^2$

c)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3$

**Q11 \* Mathematik \* Anwendungen der Ableitung \* Lösung**



1. a)  $f(x) = \frac{1}{30} \cdot (x^3 - 6x^2 - 15x + 20) \Rightarrow$   
 $f'(x) = \frac{1}{30} \cdot (3x^2 - 12x - 15) = \frac{1}{10} (x^2 - 4x - 5) = \frac{1}{10} \cdot (x-5) \cdot (x+1)$   
 d.h.  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus ]-1; 5[$

Die Funktion  $f$  ist also in den beiden Intervallen  $] -\infty; -1]$  und  $[5; \infty[$  streng monoton steigend.

b)  $f(x) = \frac{1}{120} \cdot (6x^4 - 8x^3 - 45x^2 + 108x) \Rightarrow$   
 $f'(x) = \frac{1}{120} \cdot (24x^3 - 24x^2 - 90x + 108) = \frac{1}{20} \cdot (4x^3 - 4x^2 - 15x + 18)$   
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 = 0$  Durch Probieren Lösung  $x_1 = -2$  gefunden!  
 $(4x^3 - 4x^2 - 15x + 18) : (x+2) = 4x^2 - 12x + 9$  also  $f'(x) = \frac{1}{20} (x+2) \cdot (4x^2 - 12x + 9)$

Weitere Faktorisierung mit Hilfe der Mitternachtsformel:  $4x^2 - 12x + 9 = 4 \cdot (x - 1,5)^2$

$f'(x) = \frac{1}{5} (x+2) \cdot (x-1,5)^2$  also  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$f$  ist streng monoton steigend im Intervall  $[-2; \infty[$   
 (mit einem Terrassenpunkt  $(1,5 / 0,534375)$ )

c)  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 1 - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$   
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow$   
 $x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (2 \pm \sqrt{4+4}) = 1 \pm \sqrt{2}$  und  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$

$f$  ist also im Intervall  $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$  streng monoton steigend.

2. a)  $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + k \cdot x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + k \Rightarrow$   
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + k = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (4 \pm \sqrt{16 - 4k}) = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{4 - k}$  falls  $k \leq 4$   
 $f$  ist streng monoton fallend im Intervall  $[x_2; x_1]$ , falls  $k < 4$

b)  $f(x) = k \cdot x^3 - 6x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3kx^2 - 12x - 3 = 3 \cdot (kx^2 - 4x - 1)$   
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow kx^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{1}{2k} \cdot (4 \pm \sqrt{16 - 4k}) = \frac{1}{k} \cdot (2 \pm \sqrt{4 - k})$   
 $x_{1/2} = \frac{1}{2k} \cdot (4 \pm \sqrt{16 - 4k}) = \frac{1}{k} \cdot (2 \pm \sqrt{4 - k})$  falls  $k < 4$  und  $k \neq 0$

Für  $0 < k < 4$  gilt  $f'(x) \leq 0$  im Intervall  $[x_2; x_1]$  und  $f$  ist damit streng monoton fallend in  $[x_2; x_1]$ . Für  $k < 0$  gilt  $f'(x) \geq 0$  im Intervall  $[x_2; x_1]$  und daher ist für  $k < 0$   $f$  streng monoton fallend in den Intervallen  $] -\infty; x_2]$  und  $[x_1; \infty[$ .

3. Für einen Terrassenpunkt benötigt man hier jeweils eine doppelte Nullstelle der Ableitung!  
Für eine quadratische Gleichung bedeutet dies, dass die zugehörige Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$  den Wert 0 haben muss, denn dann stimmen die beiden Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  überein.

a)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - kx^3 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3kx^2 + 4x = x \cdot (x^2 - 3kx + 4)$

Für  $x^2 - 3kx + 4 = 0$  muss  $D = 9k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$  gelten! D.h.  $k_{1/2} = \pm \frac{4}{3}$ .

Für  $k_1 = \frac{4}{3}$  gilt  $f'(x) = x \cdot (x^2 - 4x + 4) = x \cdot (x - 2)^2$  und  $(2 / -4)$  ist Terrassenpunkt.

für  $k_1 = -\frac{4}{3}$  gilt  $f'(x) = x \cdot (x^2 + 4x + 4) = x \cdot (x + 2)^2$  und  $(-2 / -4)$  ist Terrassenpunkt. .

b)  $f(x) = 0,5x^4 + kx^3 + 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 3kx^2 + 18x = x \cdot (2x^2 + 3kx + 18)$

Für  $2x^2 + 3kx + 18 = 0$  muss  $D = 9k^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = 0$  gelten! D.h.  $k_{1/2} = \pm 4$ .

Für  $k_1 = 4$  gilt  $f'(x) = x \cdot (2x^2 + 12x + 18) = 2x \cdot (x^2 + 6x + 9) = 2x \cdot (x + 3)^2$  und  $(-3 / 13,5)$  ist damit ein Terrassenpunkt.

Für  $k_2 = -4$  gilt  $f'(x) = x \cdot (2x^2 - 12x + 18) = 2x \cdot (x^2 - 6x + 9) = 2x \cdot (x - 3)^2$  und  $(3 / 13,5)$  ist damit ein Terrassenpunkt.

c)  $f(x) = x^3 + 6x^2 + k \cdot x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + k$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x + k = 0$  und es muss gelten:  $D = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot k = 0$ ,

d.h.  $k = 12$  und  $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3 \cdot (x^2 + 4x + 4) = 3 \cdot (x + 2)^2$

Für  $k = 12$  liegt damit bei  $(-2 / -5)$  ein Terrassenpunkt vor.

