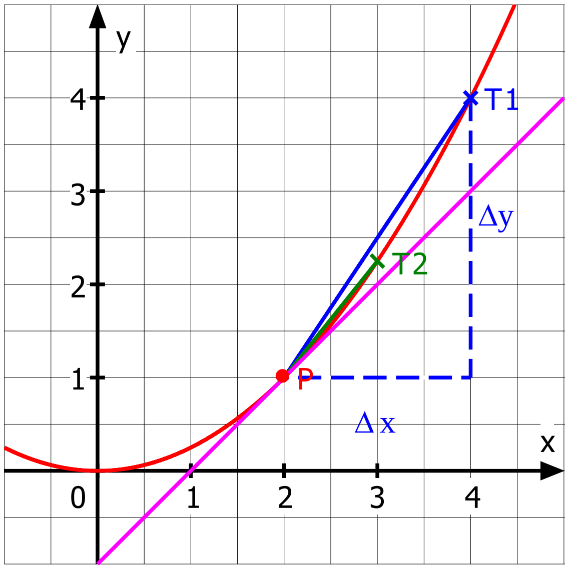
Q11 * Mathematik * Differenzenquotient und Differentialquotient

Die „Steigung des Graphen“ im Punkt P(2/1) der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ soll ermittelt werden.

Dazu betrachten wir zunächst die Steigung einer Sekante PT_1 mit einem weiteren Punkt T_1 auf dem Graphen.



Für die Steigung m_1 der Sekante PT_1 gilt:

$$m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} = \frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{f(x_{T1}) - f(x_P)}{x_{T1} - x_P}$$

Bestimmen Sie die Steigung m_2 der Sekante PT_2 :

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{f(\ )-f(2)}{\ -2} = \frac{f(x_{T2}) - f(x_P)}{x_{T2} - x_P}$$

Den Quotienten $\frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P}$ nennt man **Differenzenquotient** (oder die **mittlere Änderungsrate**) von f im Intervall $[x_P ; x_T]$.

Je dichter der Punkt T beim Punkt P liegt, umso besser wird der Wert der Sekantensteigung mit dem so genannten Wert der „Tangentensteigung“ des Graphen von f im Punkt P übereinstimmen.

Deshalb definieren wir:

Wenn für eine Funktion f an der Stelle x_P der Grenzwert $\lim\limits_{x_T \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_P} \frac{f(x_T) - f(x_P)}{x_T - x_P} = m_P$ des Differenzenquotienten existiert, dann nennen wir diesen Grenzwert m_P den Differentialquotienten (bzw. lokale Änderungsrate) von f an der Stelle x_P .

Die Gerade durch P mit der Steigung m_P nennen wir die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

Allgemein: $\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ ist der Differentialquotient von f an der Stelle x_o .

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ an den Stellen $x_o = 2$, $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$ jeweils den Wert der Tangentensteigung. Geben Sie auch die Gleichung der jeweiligen Tangente an.

2. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x$ und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt P(3 / ?).

3. Bestimmen Sie zur Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ im Punkt P(– 1 / ?) die Tangentensteigung. Geben Sie die Gleichung der zugehörigen Tangente an! Skizzieren Sie G_f und die Tangente.

Q11 * Mathematik * Differenzenquotient und Differentialquotient * Lösungen

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1,25}{1} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{f(x_{T2}) - f(x_P)}{x_{T2} - x_P}$$

1. $f(x) = 0,25x^2$; $x_o = 2 \Rightarrow$

$$m_o = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} \frac{0,25x^2 - 0,25\cdot 2^2}{x-2} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} \frac{0,25(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} =$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 2} 0,25\cdot(x+2) = 0,25\cdot 4 = 1$$

$f(x) = 0,25x^2$; $x_1 = 3 \Rightarrow$

$$m_1 = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} \frac{0,25x^2 - 0,25\cdot 3^2}{x-3} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} \frac{0,25(x-3)\cdot(x+3)}{x-3} =$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} 0,25\cdot(x+3) = 0,25\cdot 6 = 1,5$$

$f(x) = 0,25x^2$; $x_2 = -1 \Rightarrow$

$$m_2 = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} x_2} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{0,25x^2 - 0,25\cdot(-1)^2}{x-(-1)} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{0,25(x-1)\cdot(x+1)}{x+1} =$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} 0,25\cdot(x-1) = 0,25\cdot(-2) = -0,5$$

2. $f(3) = 0,5\cdot 3^2 - 2\cdot 3 = 4,5 - 6 = -1,5$ also $P(3/-1,5)$

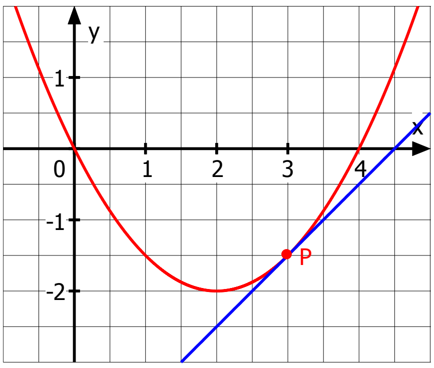
$$m = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} \frac{0,5x^2 - 2x - f(3)}{x-3} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} \frac{0,5x^2 - 2x + 1,5}{x-3} =$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} \frac{0,5(x-3)\cdot(x-1)}{x-3} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} 3} 0,5\cdot(x-1) = 0,5\cdot 2 = 1$$

Tangentengleichung: $y = m\cdot x + t = 1\cdot x + t$

$P(3/-1,5)$ eingesetzt: $-1,5 = 1\cdot 3 + t \Rightarrow t = -4,5$

Also folgt die Tangentengleichung: $y = x - 4,5$



3. $f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 = -\frac{1}{3}$ also $P(-1/-\frac{1}{3})$

$$m = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{\frac{1}{3}x^3 - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}}{x+1} =$$

$$\lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{x^3 + 1}{3\cdot(x+1)} = \lim_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{3\cdot(x+1)} =$$

$$\frac{1}{3}\cdot(1+1+1) = 1$$

Tangentengleichung: $y = m\cdot x + t = 1\cdot x + t$

$P(-1/-\frac{1}{3})$ eingesetzt: $-\frac{1}{3} = 1\cdot(-1) + t \Rightarrow t = \frac{2}{3}$

Also folgt die Tangentengleichung: $y = x + \frac{2}{3}$