Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4}{2+3x}$.

   a) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt P(1 / 0,8).

   b) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen in einem beliebigen Punkt P (x_o / $f(x_o)$).

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$.
   Bestimmen Sie die Steigung in einem beliebigen Punkt P (x_o / $f(x_o)$).

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = a \cdot x^5$ (mit $a \in R$).
   Bestimmen Sie die Steigung in einem beliebigen Punkt P (x_o / $f(x_o)$).

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1+x^3}$.
   Bestimmen Sie die Steigung des Graphen in einem beliebigen Punkt P (x_o / $f(x_o)$).

Q11 * Mathematik * Aufgaben zum Differentialquotienten * Lösungen

1. a) $f(x) = \dfrac{4}{2+3x}$ Steigung m in (P(1/0,8)

$$m = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4}{2+3x} - 0{,}8}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4-0{,}8\cdot(2+3x)}{2+3x}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{4-1{,}6-2{,}4x}{(2+3x)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2{,}4-2{,}4x}{(2+3x)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{-2{,}4\cdot(x-1)}{(2+3x)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-2{,}4}{(2+3x)} = \frac{-2{,}4}{5} = -0{,}48$$

b) $$m = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{4}{2+3x} - \frac{4}{2+3x_o}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{4\cdot(2+3x_o)-4\cdot(2+3x)}{(2+3x)\cdot(2+3x_o)}}{x-x_o} =$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{\frac{4\cdot(2+3x_o)-4\cdot(2+3x)}{(2+3x)\cdot(2+3x_o)}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{12x_o-12x}{(2+3x)\cdot(2+3x_o)\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{-12(x-x_o)}{(2+3x)\cdot(2+3x_o)\cdot(x-x_o)} = \lim_{x\to x_o} \frac{-12}{(2+3x)\cdot(2+3x_o)} = \frac{-12}{(2+3x_o)^2}$$

2. $$m = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x_o{}^2}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{3}{x_o{}^2}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{3x_o{}^2-3x^2}{x^2\cdot x_o{}^2}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{3\cdot(x_o{}^2-x^2)}{x^2\cdot x_o{}^2\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{3\cdot(x_o-x)\cdot(x_o+x)}{x^2\cdot x_o{}^2\cdot(x-x_o)} = \lim_{x\to x_o} \frac{-3\cdot(x_o+x)}{x^2\cdot x_o{}^2} = \frac{-3\cdot(x_o+x_o)}{x_o{}^2\cdot x_o{}^2} = \frac{-6x_o}{x_o{}^4} = \frac{-6}{x_o{}^3}$$

3. $$m = \lim_{x\to x_o} \frac{ax^5 - ax_o{}^5}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{a(x^5-x_o{}^5)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{a(x-x_o)\cdot(x^4+x^3x_o+x^2x_o{}^2+xx_o{}^3+x_o{}^4)}{x-x_o} =$$

$$\lim_{x\to x_o} a\cdot(x^4+x^3x_o+x^2x_o{}^2+xx_o{}^3+x_o{}^4) = a\cdot(x_o{}^4+x_o{}^3x_o+x_o{}^2x_o{}^2+x_ox_o{}^3+x_o{}^4) = 5ax_o{}^4$$

4. $$m = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{2x}{1+x^3} - \frac{2x_o}{1+x_o{}^3}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{\frac{2x\cdot(1+x_o{}^3)-2x_o\cdot(1+x^3)}{(1+x^3)\cdot(1+x_o{}^3)}}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o} \frac{2x+2xx_o{}^3-2x_o-2x_ox^3}{(1+x^3)\cdot(1+x_o{}^3)\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{(-2x_o)\cdot x^3+(2+2x_o{}^3)\cdot x-2x_o}{(1+x^3)\cdot(1+x_o{}^3)\cdot(x-x_o)} = \lim_{x\to x_o} \frac{(-2x_ox^2-2x_o{}^3+2)\cdot(x-x_o)}{(1+x^3)\cdot(1+x_o{}^3)\cdot(x-x_o)} =$$

$$\lim_{x\to x_o} \frac{(-2x_ox^2-2x_o{}^3+2)}{(1+x^3)\cdot(1+x_o{}^3)} = \frac{(-2x_ox_o{}^2-2x_o{}^3+2)}{(1+x_o{}^3)\cdot(1+x_o{}^3)} = \frac{-4x_o{}^3+2}{(1+x_o{}^3)^2}$$

Polynomdivision:

$$\left((-2x_o)\cdot x^3+(2+2x_o{}^3)\cdot x-2x_o\right) : (x-x_o) = -2x_ox^2-2x_o{}^2x+2$$

$$\underline{-(-2x_ox^3+2x_o{}^2x^2)}$$

$$-2x_o{}^2x^2+(2+2x_o{}^3)\cdot x-2x_o$$

$$\underline{-(-2x_o{}^2x^2+2x_o{}^3x)}$$

$$-2x_o{}^3x+(2+2x_o{}^3)\cdot x-2x_o = 2x-2x_o$$

$$\underline{2x-2x_o}$$

$$-(2x-2x_o)$$