Q11 * Mathematik m3

Polstellen und hebbare Definitionslücken gebrochen rationaler Funktionen

1. Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an der Definitionslücke.
   Skizzieren Sie den Graphen und prüfen Sie Ihre Skizze mit Hilfe eines Funktionsplotters.

   a) $f(x)=\frac{0,5x}{2-x}$ b) $g(x)=\frac{0,5x}{x-2}$ c) $h(x)=\frac{0,5x}{(2-x)^2}$

2. Untersuchen Sie die Funktion an vorhandenen Definitionslücken.
   Skizzieren Sie dann den Graphen! Prüfen Sie mit Hilfe eines Funktionsplotters Ihre Skizze.

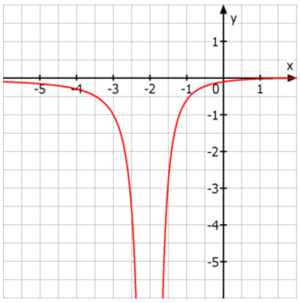
   a) $f(x)=\frac{2x}{4-x^2}$ b) $g(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ c) $h(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$

3. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion. Prüfen Sie dann, ob es sich bei den Definitionslücken um Polstellen (mit oder ohne Vorzeichenwechsel) oder um hebbare Definitionslücken handelt.

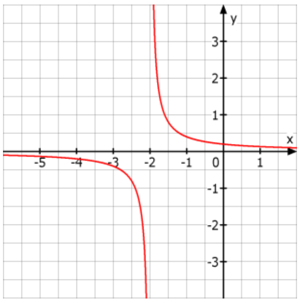
   a) $f(x)=\frac{3-x}{x^2-9}$ b) $g(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^2-9}$ c) $h(x)=\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-2}$

4. Ordnen Sie die 4 abgebildeten Graphen jeweils einem der angegeben Funktionsterme zu.
   Begründen Sie kurz Ihre Zuordnung.

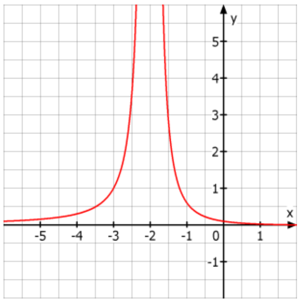
Graph A



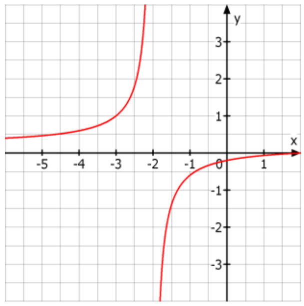
Graph B



Graph C



Graph D



$f(x)=\frac{2}{5x+10}$; $g(x)=\frac{x-2}{5x+10}$; $h(x)=\frac{2-x}{5x+10}$; $k(x)=\frac{x}{5(x+2)}$;

$m(x)=\frac{x-2}{5(x+2)^2}$; $n(x)=\frac{2+x}{5(x+2)^2}$; $p(x)=\frac{-x}{5(x+2)^2}$; $q(x)=\frac{2-x}{5(x+2)^2}$

Weitere lohnenswerte Aufgaben aus dem Lehrbuch:
S. 12 / Nr. 5, 8, 10
S. 13 / Nr. 12

RAS 17.09.2014

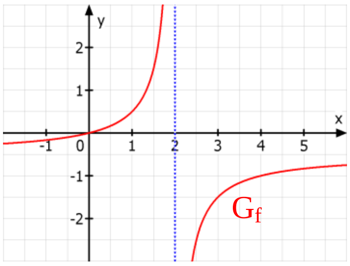
Q11 * Mathematik m3

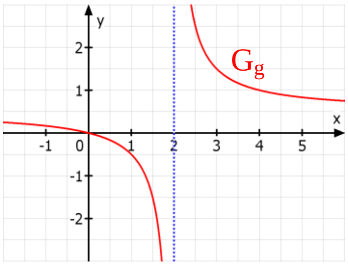
Polstellen und hebbare Definitionslücken gebrochen rationaler Funktionen * Lösungen

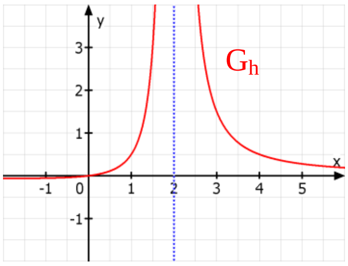
1. a) $f(x)=\dfrac{0{,}5x}{2-x}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} f(x)=\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\dfrac{0{,}5x}{2-x}="\dfrac{1}{0^{\mp}}"=\mp\infty$

   b) $g(x)=\dfrac{0{,}5x}{x-2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} g(x)=\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\dfrac{0{,}5x}{x-2}="\dfrac{1}{0^{\pm}}"=\pm\infty$

   c) $h(x)=\dfrac{0{,}5x}{(2-x)^2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ und $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2} h(x)=\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\dfrac{0{,}5x}{(2-x)^2}="\dfrac{1}{(0^{\mp})^2}"="\dfrac{1}{0^{+}}"=+\infty$



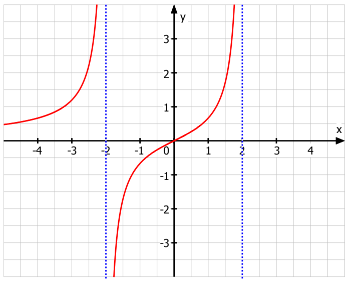




2. a) $f(x)=\dfrac{2x}{4-x^2}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{2;-2\}$ und

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} +2}\frac{2x}{4-x^2}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} +2}\frac{2x}{(2+x)\cdot(2-x)}="\frac{4}{4\cdot 0^{\mp}}"=\mp\infty \quad \text{und}$$

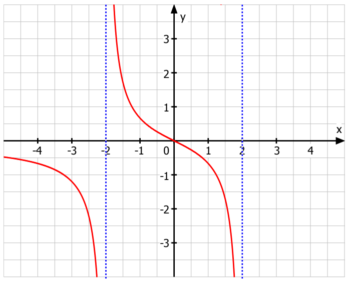
$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2}\frac{2x}{4-x^2}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2}\frac{2x}{(2-x)\cdot(2+x)}="\frac{-4}{4\cdot 0^{\pm}}"=\mp\infty$$



   b) $g(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;\,2\}$,

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\frac{2x}{x^2-4}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\frac{2x}{(x-2)\cdot(x+2)}="\frac{4}{0^{\pm}\cdot 4}"=\pm\infty \quad \text{und}$$

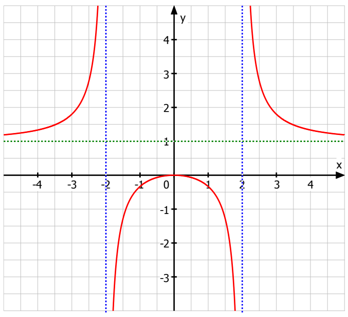
$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2}\frac{2x}{x^2-4}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2}\frac{2x}{(x-2)\cdot(x+2)}="\frac{-4}{-4\cdot 0^{\pm}}"=\pm\infty$$



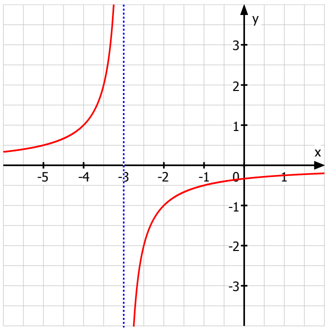
   c) $h(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$, $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;+2\}$,

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\frac{x^2}{(x-2)\cdot(x+2)}="\frac{4}{0^{\pm}\cdot 4}"=\pm\infty$$

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 2}\frac{x^2}{(x-2)\cdot(x+2)}="\frac{4}{-4\cdot 0^{\pm}}"=\mp\infty$$



3. a) $f(x) = \dfrac{3-x}{x^2-9} = \dfrac{3-x}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{-1}{x+3}$, $D = \backslash\{+3,-3\}$

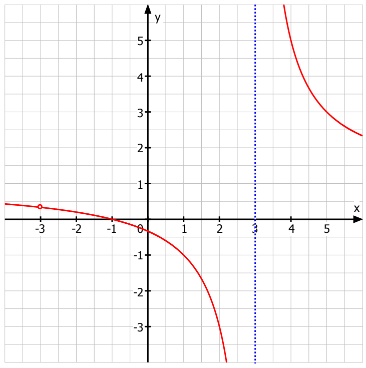


Hebbare Definitionslücke bei $x_1 = +3$, denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} +3} \dfrac{-1}{x+3} = -\dfrac{1}{6}$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_2 = -3$,

denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -3} \dfrac{-1}{x+3} = "\dfrac{-1}{0^{\pm}}" = \mp\infty$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-9} = \dfrac{(x+1)\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{x+1}{x-3}$, $D = \backslash\{+3,-3\}$



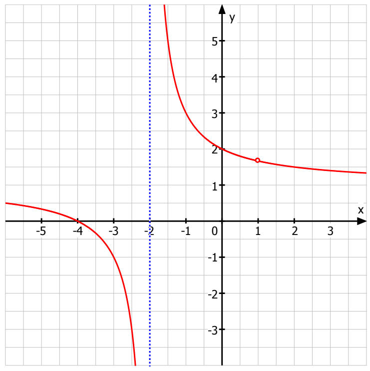
Hebbare Definitionslücke bei $x_1 = -3$,

denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -3} \dfrac{x+1}{x-3} = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3}$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_2 = +3$,

denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} +3} \dfrac{x+1}{x-3} = "\dfrac{4}{0^{\pm}}" = \pm\infty$

c) $h(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x-2} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+4)}{(x-1)\cdot(x+2)} = \dfrac{x+4}{x+2}$, $D = R \backslash \{1;-2\}$



Hebbare Definitionslücke bei $x_1 = 1$, denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} 1} \dfrac{x+4}{x+2} = \dfrac{5}{3}$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei $x_2 = -2$,

denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} \dfrac{x+4}{x+2} = "\dfrac{2}{0^{\pm}}" = \pm\infty$

4. Graph A gehört zur Funktion m, denn

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} m(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} \frac{x-2}{5(x+2)^2} = "\frac{-4}{(\pm 0)^2}" = "\frac{-4}{+0}" = -\infty \; .$$

(n hat bei $x_0 = -2$ eine hebbare Definitionslücke, passt damit nicht)

Graph B gehört zur Funktion f, denn

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} \frac{2}{5(x+2)} = "\frac{2}{\pm 0}" = \pm\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -\infty} f(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -\infty} \frac{2}{5(x+2)} = "\frac{2}{\pm\infty}" = \pm 0 \, .$$

(h(2) = 0, h passt damit nicht)

Graph C gehört zur Funktion q, denn

$$\lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} q(x) = \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} \frac{2-x}{5(x+2)^2} = "\frac{+4}{5(+0)^2}" = "\frac{+4}{+0}" = +\infty$$ (und $p(0) = 0$, passt also nicht).

Graph D gehört zur Funktion g, denn $\lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} g(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} -2} \dfrac{x-2}{5(x+2)} = "\dfrac{-4}{\pm 0}" = \mp\infty$

(und k(0) = 0, k passt also nicht).