Q11 * Mathematik * Drei Aufgaben zur Umkehrfunktion

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.
   a) Zeigen Sie, dass $D_f = \mathbb{R}$ gilt und der Graph von f einen Tiefpunkt hat.
   Bestimmen Sie den Wertebereich von f und skizzieren Sie den Graphen.
   b) Begründen Sie, dass es zwei maximale Definitionsbereiche gibt, in denen die Funktion umkehrbar ist. Bestimmen Sie für jeden dieser Bereiche den Term der Umkehrfunktion. Geben Sie für beide Umkehrfunktionen den Definitions- und den Wertebereich an. Tragen Sie die beiden Graphen der Umkehrfunktionen in die Skizze aus a) ein.

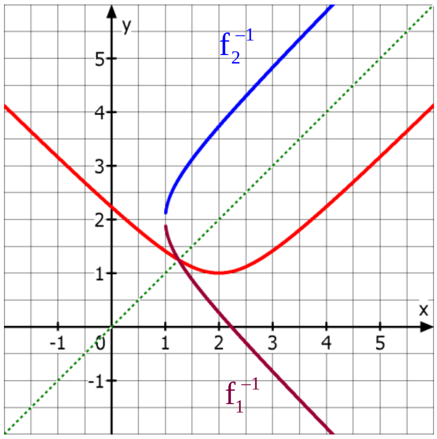
2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{3-4x}{x^2+1}$.
   a) Bestimmen Sie D_f , alle Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
   b) Ermitteln Sie alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte des Graphen von f.
   Geben Sie den Wertebereich von f an.
   Skizzieren Sie den Graph von f.
   c) Begründen Sie, dass es drei maximale Definitionsbereiche gibt, in denen die Funktion umkehrbar ist.
   Einer dieser Bereiche liegt ganz in der Menge der negativen reellen Zahlen.
   Bestimmen Sie für diesen Bereich den Term der Umkehrfunktion und tragen Sie den zugehörigen Graphen in die Skizze aus b) ein.

Zusatzaufgabe

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{3x^2-4x}{x^2+1}$.
   a) Bestimmen Sie D_f , alle Nullstellen von f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
   b) Ermitteln Sie alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte des Graphen von f.
   Geben Sie den Wertebereich von f an.
   Skizzieren Sie den Graph von f.
   c) Begründen Sie, dass es drei maximale Definitionsbereiche gibt, in denen die Funktion umkehrbar ist.
   Einer dieser Bereiche liegt ganz in der Menge der positiven reellen Zahlen.
   Bestimmen Sie für diesen Bereich den Term der Umkehrfunktion und tragen Sie den zugehörigen Graphen in die Skizze aus b) ein.

Q11 * Mathematik * Drei Aufgaben zur Umkehrfunktion * Lösungen

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$



a) $D_f = R$, denn $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ für $x \in R$

$f'(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ und $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$

wegen Vorzeichenwechsel von $f'(x)$

von $-$ auf $+$ bei $x_1 = 2$ also TIP$(2/1)$

b) f ist streng monoton fallend in $]-\infty; 2]$ und daher in

$D_{f1} =]-\infty\,;\,2]$ umkehrbar mit $W_{f1} = [1\,;\,\infty[$

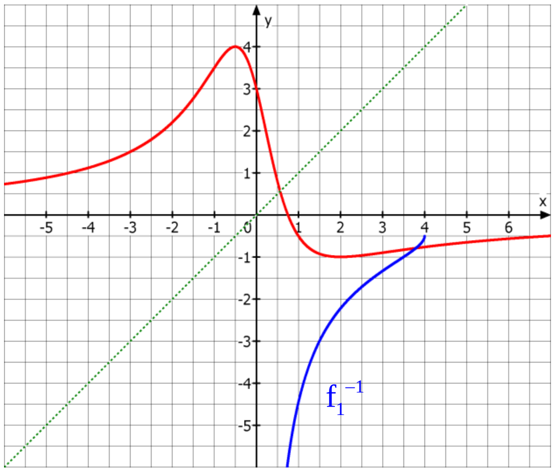
f ist streng monoton steigend in $[2\,;\infty[$ und daher in

$D_{f2} = [2\,;\infty[$ umkehrbar mit $W_{f2} = [1\,;\,\infty[$

$f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 1}$ mit $x \in D_{f_1^{-1}} = [1\,;\,\infty[\,; W_{f_1^{-1}} =]-\infty\,;\,2]$

$f_2^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x^2 - 1}$ mit $x \in D_{f_2^{-1}} = [1\,;\,\infty[\,; W_{f_2^{-1}} = [2\,;\,\infty[$

2. $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$



a) $D_f = R$; NSt. $x_1 = \dfrac{3}{4}$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0^{\mp}$

b) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot (2x^2 - 3x - 2)}{(x^2 + 1)^2}$

HOP$(-0{,}5/4)$ und TIP$(2/-1)$

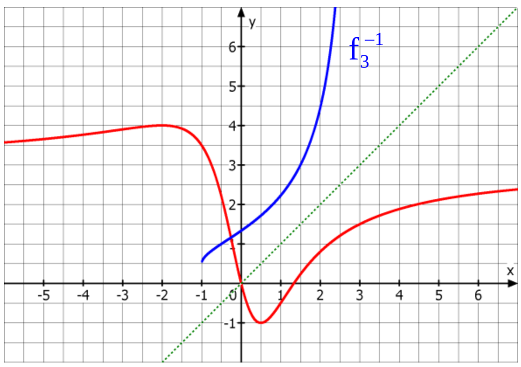
c) $D_{f1} =]-\infty;-0{,}5]$ mit $W_{f1} =]\,0\,;\,4\,]$;

$D_{f2} =]-0{,}5\,;\,2]$ mit $W_{f2} = [-1\,;\,4\,]$;

$D_{f3} = [\,2\,;\,\infty[$ mit $W_{f3} = [-1\,;\,0\,[$

Für D_{f1} gilt $f_1^{-1}(x) = \dfrac{-2 - \sqrt{4 + 3x - x^2}}{x}$ mit $x \in]\,0;\,4\,]$

3. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 + 1}$



a) $D_f = R$; NSt. $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{4}{3}$;

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 3$

b) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot (2x^2 + 3x - 2)}{(x^2 + 1)^2}$

HOP$(-2/4)$ und TIP$(0{,}5/-1)$

c) $D_{f1} =]-\infty;-2]$ mit $W_{f1} =]\,3\,;\,4\,]$; $D_{f2} =]-2;0{,}5]$ mit $W_{f2} = [-1\,;\,4\,]$;

$D_{f3} = [\,0{,}5\,;\,\infty[$ mit $W_{f3} = [-1\,;\,3\,[$

Für D_{f3} gilt $f_3^{-1}(x) = \dfrac{-2 - \sqrt{4 + 3x - x^2}}{x - 3}$ mit $x \in [-1;\,3\,[$