

## Q11 \* Mathematik \* Das Skalarprodukt zweier Vektoren

1. Berechnen Sie im Dreieck  $ABC$  die Seitenlängen und die Innenwinkel.  
 $A(2 / -3 / 4)$ ,  $B(-1 / 1 / 4)$  und  $C(4 / -1 / 3)$ .



2. Gegeben sind die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

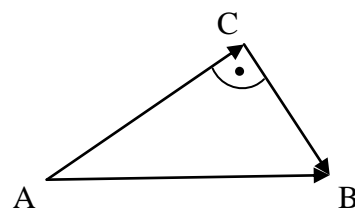
- Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.
- Bestimmen Sie je drei Vektoren die auf  $\vec{a}$  bzw. auf  $\vec{b}$  senkrecht stehen.
- Bestimmen Sie einen Vektor  $\vec{c}$ , der sowohl auf  $\vec{a}$  als auch auf  $\vec{b}$  senkrecht steht.

3. Gegeben sind die beiden Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie möglichst einfach einen Vektor  $\vec{c}$ , der sowohl auf  $\vec{a}$  als auch auf  $\vec{b}$  senkrecht steht.

4. Das Dreieck  $ABC$  ist durch  $A(-1 / 4 / 3)$ ,  $B(5 / -5 / 6)$  und  $C(7 / 0 / 3)$  gegeben.
- Berechnen Sie den Fußpunkt  $F$  des Lotes von  $C$  auf die Seite  $[AB]$ .
  - Berechnen Sie die Länge der Höhe  $h_c$  und den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .
5. Gegeben sind die Punkte  $A(1 / -2 / 3)$ ,  $B(5 / 2 / 1)$  und  $C_k(5 + 2k / -1 - k / 4 + 2k)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .
- Zeigen Sie, dass das Dreieck  $ABC_k$  für  $k \neq -1$  gleichschenkelig ist.
  - Für welchen Wert von  $k$  ist das Dreieck gleichseitig?
  - Für welchen Wert von  $k$  ist das Dreieck rechtwinklig?

6. Beweisen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts den Satz von Pythagoras.



7. Gegeben sind die Punkte  $A(1 / -2 / 3)$  und  $B(5 / 2 / 1)$ .  
Finden Sie einen Punkt  $C$ , so dass das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig und rechtwinklig ist.  
Wie viele Punkte  $C$  mit der gesuchten Eigenschaft gibt es und wie liegen diese Punkte?

**Q11 \* Mathematik \* Das Skalarprodukt zweier Vektoren \* Lösungen**



$$1. \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \overline{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5; \quad \overline{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3; \quad \overline{BC} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \circ \overline{AC}}{\overline{AB} \cdot \overline{AC}} = \frac{-6 + 8 + 0}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15} \Rightarrow \alpha \approx 82,3^\circ;$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BA} \circ \overline{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}} = \frac{15 + 8 - 0}{5 \cdot \sqrt{30}} = \frac{23}{5 \cdot \sqrt{30}} \Rightarrow \beta \approx 32,9^\circ; \quad \gamma \approx 180^\circ - 32,9^\circ - 82,3^\circ = 64,8^\circ$$

$$2. \quad a) \quad \cos \varphi = \frac{-12 - 4 + 3}{\sqrt{36 + 4 + 9} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{-13}{7 \cdot 3} \Rightarrow \varphi \approx 128,2^\circ$$

$$b) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} : \text{z.B. } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{a}; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \perp \vec{a}; \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \vec{a} \quad \text{und z.B. } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad \text{Für } \vec{c} \text{ muss gelten } \vec{a} \circ \vec{c} = 0 \text{ und } \vec{b} \circ \vec{c} = 0 \Rightarrow$$

$$(1) \quad 6c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \quad \text{und} \quad (2) \quad -2c_1 + 2c_2 + c_3 = 0$$

$$\text{Eliminiere z.B. } c_2 \text{ durch } (1) + (2) \Rightarrow 4c_1 + 4c_3 = 0 \quad \text{und w\u00e4hle nun frei } c_1 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$$

$$\text{und in } (2) \text{ eingesetzt folgt } -2 + 2c_2 - 1 = 0 \Rightarrow c_2 = 1,5 \quad \text{also } \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ c_2 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0 = \vec{c} \circ \vec{b} = 10 + 2c_2 + 6 \Rightarrow c_2 = -8 \quad \text{also } \vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Das Dreieck ABC ist durch A(-1/4/3), B(5/-5/6) und C(7/0/3) gegeben.

$$a) \quad \overline{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{AF} = \frac{\overline{AC} \circ \overline{AB}}{|\overline{AB}|^2} \cdot \overline{AB} = \frac{48 + 36 + 0}{(3 \cdot \sqrt{4 + 9 + 1})^2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{84}{9 \cdot 14} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \vec{A} + \overline{AF} = \begin{pmatrix} -1 + 4 \\ 4 - 6 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{also } F(3/-2/5)$$

$$b) \quad h_c = |\overline{CF}| = \sqrt{(3-7)^2 + (-2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{16 + 4 + 4} = 2 \cdot \sqrt{6}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{4 + 9 + 1} \cdot 2 \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = 6 \cdot \sqrt{21}$$

$$5. a) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC_k} = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC_k} = \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix};$$

$$\overline{AC_k} = \sqrt{16+16k+4k^2+1-2k+k^2+1+4k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2}$$

$$\overline{BC_k} = \sqrt{4k^2+9+6k+k^2+9+12k+4k^2} = \sqrt{18+18k+9k^2} \quad \text{also } \overline{AC_k} = \overline{BC_k}$$

(Für  $k=-1$  gilt  $C_1(3/0/2)$  und  $C_1$  ist der Mittelpunkt der Strecke  $[AB]$ .)

b) Das Dreieck ABC ist gleichseitig, falls gilt

$$\overline{AC_k} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{16+16+4} = \sqrt{18+18k+9k^2} \Leftrightarrow 36 = 18+18k+9k^2 \Leftrightarrow$$

$$0 = -18+18k+9k^2 \Leftrightarrow k^2+2k-2=0 \Leftrightarrow k_{1/2} = \frac{1}{2} \cdot (-2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 2}) = -1 \pm \sqrt{3}$$

c) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, falls gilt  $\overrightarrow{AC_k} \circ \overrightarrow{BC_k} = 0 \Leftrightarrow$

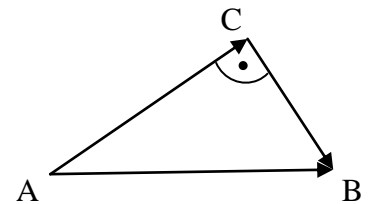
$$\begin{pmatrix} 4+2k \\ 1-k \\ 1+2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2k \\ -3-k \\ 3+2k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8k+4k^2-3+2k+k^2+3+8k+4k^2=0 \Leftrightarrow$$

$$9k^2+18k=0 \Leftrightarrow 9k \cdot (k+2)=0 \Leftrightarrow k_3=0; k_4=-2$$

6.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$  und  $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow$

$$c^2 = (\overline{AB})^2 = (\overline{AC} + \overline{CB})^2 = (\overline{AC})^2 + 2 \cdot \overline{AC} \circ \overline{CB} + (\overline{CB})^2 =$$

$$(\overline{AC})^2 + 0 + (\overline{CB})^2 = b^2 + a^2$$



$$7. \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\overline{AB}| = 2 \cdot \sqrt{4+4+1} = 6$$

Der Mittelpunkt M der Strecke  $[AB]$  lautet  $M(3/0/2)$ .

$$\text{Eine Senkrechte zu } \overrightarrow{AB} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist z.B. } \vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt C mit  $\overrightarrow{MC} = r \cdot \vec{s} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ( $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) liefert ein gleichschenkliges Dreieck.

Diese Punkte liegen in einer Ebene E, die M enthält und senkrecht zu AB liegt.

Für  $r=1$  ist dieses Dreieck sogar rechtwinklig:  $\vec{C} = \vec{M} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  also  $C(5/-1/4)$ , denn

dann gilt  $\overline{AM} = \overline{MC}$ .

