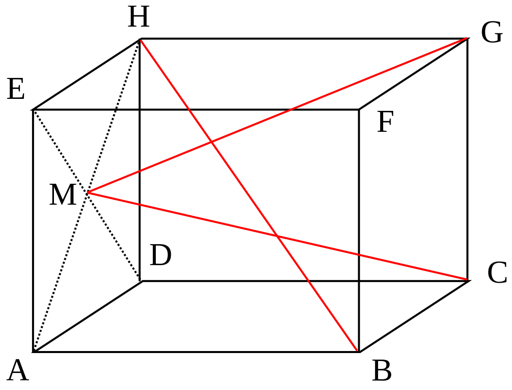
Q11 * Mathematik * Zwei Aufgaben zu linear unabhängigen Vektoren

1. Das Bild zeigt einen Quader ABCDEFGH.

   M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ADHE.

   M ist der Mittelpunkt des Rechtecks ADHE.

   Wählen Sie für die folgende Rechnung geeignete Basisvektoren.

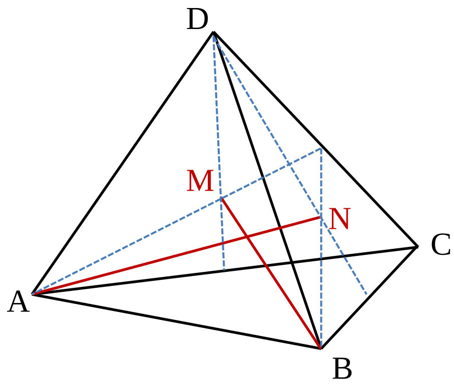


   a) Prüfen Sie, ob sich die Geraden GM und HB schneiden.
   In welchem Verhältnis teilt gegebenenfalls dieser Schnittpunkt die beiden Strecken?

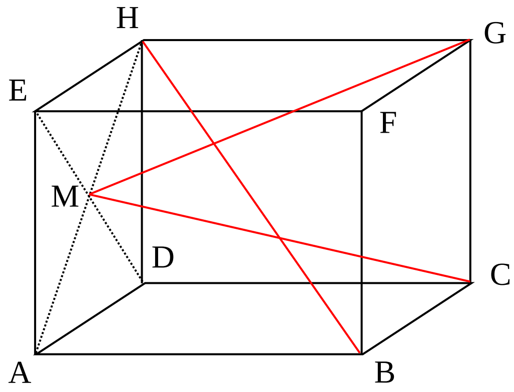
   b) Prüfen Sie, ob sich die Geraden CM und HB schneiden.
   In welchem Verhältnis teilt gegebenenfalls dieser Schnittpunkt die beiden Strecken?

2. Das Bild zeigt eine Pyramide ABCD.
   M und N sind die Schwerpunkte im Dreieck ACD bzw. BCD.

   Prüfen Sie mit geeigneter Rechnung, ob sich die beiden Geraden BM und AN in einem Punkt S schneiden.
   In welchem Verhältnis teilt gegebenenfalls S diese beiden Strecken?



Q11 * Mathematik * Zwei Aufgaben zu linear unabhängigen Vektoren



1. a) Basisvektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}\ ;\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}\ ;\ \overrightarrow{AE} = \vec{c}$

Annahme: MG und HB schneiden sich in einem Punkt S.

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AM} + r\cdot\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c} + r\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c} + \vec{a}\right) =$$

$$r\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot(1+r)\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot(1+r)\cdot\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HS} = \overrightarrow{AH} + t\cdot\overrightarrow{HB} = \vec{b} + \vec{c} + t\cdot(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = t\cdot\vec{a} + (1-t)\cdot\vec{b} + (1-t)\cdot\vec{c}$$

Koeffizientenvergleich: (1) $r = t$ und (2) $\frac{1}{2}\cdot(1+r) = (1-t)$ und (3) $\frac{1}{2}\cdot(1+r) = (1-t)$

(1) $r = t$ in (2) bzw. (3) $\frac{1}{2}\cdot(1+t) = (1-t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = 1-t \Leftrightarrow \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} = r$

MG und HB schneiden sich also in einem Punkt S

und S teilt [MG] und auch [HB] im Verhältnis 1 : 2.

(Hinweis: Da [MG] und [HB] im Rechteck ABGH liegen schneiden sie sich in einem Punkt S, und nach dem Strahlensatz folgt auch sofort das berechnete Teilverhältnis.)

b) Basisvektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}\ ;\ \overrightarrow{AD} = \vec{b}\ ;\ \overrightarrow{AE} = \vec{c}$

Annahme: CM und HB schneiden sich in einem Punkt T.

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MT} = \overrightarrow{AM} + r\cdot\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c} + r\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\cdot\vec{c} + \vec{a}\right) =$$

$$r\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot(1+r)\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot(1-r)\cdot\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HT} = \overrightarrow{AH} + t\cdot\overrightarrow{HB} = \vec{b} + \vec{c} + t\cdot(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}) = t\cdot\vec{a} + (1-t)\cdot\vec{b} + (1-t)\cdot\vec{c}$$

Koeffizientenvergleich: (1) $r = t$ und (2) $\frac{1}{2}\cdot(1+r) = (1-t)$ und (3) $\frac{1}{2}\cdot(1-r) = (1-t)$

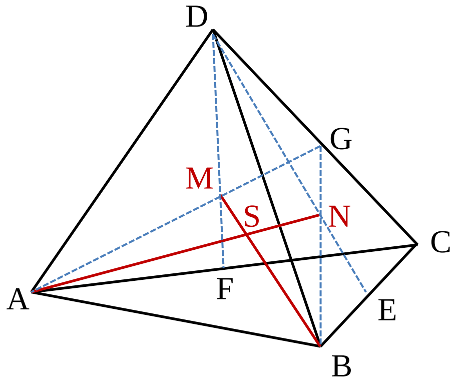
(1) $r = t$ in (2) $\frac{1}{2}\cdot(1+t) = (1-t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = 1-t \Leftrightarrow \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}\ r$

Überprüfen dieses Ergebnisses in (3):

linke Seite: $\frac{1}{2}\cdot(1-r) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$; rechte Seite: $1-t = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ Widerspruch!

(Hinweis: Da [HB] nicht aber C in der Ebene des Rechtecks ABGH liegt und MC diese Ebene nur im Punkt M schneidet, können sich MC und HB nicht schneiden.)

2. Basisvektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$



Die Punkte E, F und G halbieren die Strecken [BC], [AC] und [DC].

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{FD} = \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \vec{c}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\vec{b} - \frac{1}{6}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{c} = \frac{1}{3}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BG} = \vec{a} + \frac{2}{3}\cdot\left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\cdot\vec{c}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{c}$$

Wir nehmen an, dass sich AN und BM im Punkt S schneiden. Dann gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + r\cdot\overrightarrow{BM} = \vec{a} + r\cdot\left(-\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{c}\right) = (1-r)\cdot\vec{a} + r\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{b} + r\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AS} = t\cdot\overrightarrow{AN} = t\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\vec{a} + \frac{1}{3}\cdot\vec{b} + \frac{1}{3}\cdot\vec{c}\right) = t\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{a} + t\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{b} + t\cdot\frac{1}{3}\cdot\vec{c}$$

Koeffizientenvergleich:

(1) $1 - r = \frac{1}{3}t$ (2) bzw. (3) $\frac{1}{3}r = \frac{1}{3}t \;\Rightarrow\; r = t$ in (1)

$$1 - t = \frac{1}{3}t \;\Leftrightarrow\; 1 = \frac{4}{3}t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{3}{4} = r$$

BM und AN schneiden sich also in einem Punkt S und dieser Punkt S teilt die beiden Strecken [AN] und [BM] im Verhältnis ¾ : ¼ = 3 : 1 .

(Hinweis: Da [AN] und [BM] im Dreieckeck ABG liegen, schneiden sie sich in einem Punkt S, und es gilt

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MG}} = \frac{2}{1} = \frac{\overline{BN}}{\overline{NG}}$$ (Schwerelinien!) und daher $x \parallel y$;

zudem $\frac{y}{x} = \frac{\overline{AG}}{\overline{MG}} = \frac{3}{1}$ und $\frac{\overline{MS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{NS}}{\overline{SA}} = \frac{y}{x} = \frac{3}{1}$

S teilt damit die beiden Strecken [AN] und [BM] jeweils im Verhältnis 3 : 1 .)