

Q11 * Mathematik * Gebrochen rationale Funktionen * Aufgaben

1. Geben Sie den maximal möglichen Definitionsbereich an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen an den Definitionslücken sowie für $x \rightarrow \pm \infty$.
Skizzieren Sie den Graphen und prüfen Sie Ihre Skizze mit Hilfe eines Funktionsplotters.

a) $f(x) = \frac{2-x}{0,2x^2-1}$ b) $g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x}$ c) $h(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$
d) $k(x) = \frac{x}{2x-4} - \frac{x^2+1}{x}$ e) $m(x) = \frac{2+x+0,5x^2}{x^2-4}$ f) $n(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2x-1}$

2. Geben Sie den Term einer (möglichst einfachen) gebrochen rationalen Funktion f an, die folgende Eigenschaften besitzt.
- a) Der Graph von f hat eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 2$ und für $x \rightarrow \pm \infty$ die Asymptote $y = 0,5$.
- b) Der Graph von f hat Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$ und für $x \rightarrow \pm \infty$ die Asymptote $y = 0,5x - 1$.
- c) Der Graph von f hat eine Polstellen mit Vorzeichenwechsel bei $x_1 = -2$, ist punktsymmetrisch zum Ursprung und hat für $x \rightarrow \pm \infty$ die Asymptote $y = 0$.
- d) Der Graph von f hat eine Polstelle bei $x_1 = 0$ und ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Für $x \rightarrow \pm \infty$ hat der Graph die Asymptote $y = 0$ und bei $x_2 = 2$ befindet sich eine Nullstelle.



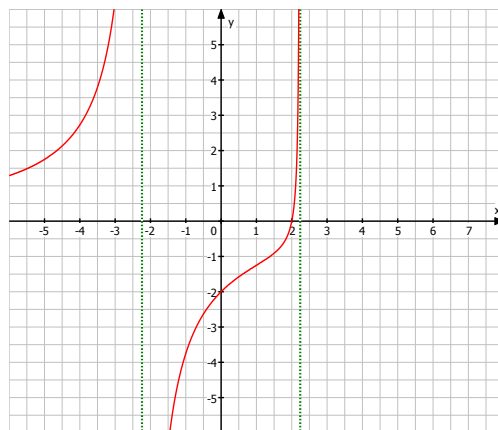
Q11 * Mathematik * Gebrochen rationale Funktionen * Lösungen

1. a) $f(x) = \frac{2-x}{0,2x^2-1}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

$$\lim_{x \rightarrow +\sqrt{5}} f(x) = \frac{2-\sqrt{5}}{0^{\pm}} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{5}} f(x) = \frac{2+\sqrt{5}}{0^{\mp}} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}}{0,2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0 \pm 0}{0,2 - 0} = 0$$

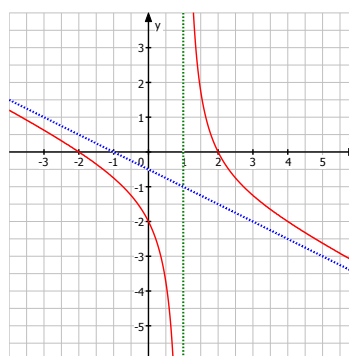


b) $g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{-1,5}{0^{\mp}} = \pm \infty$$

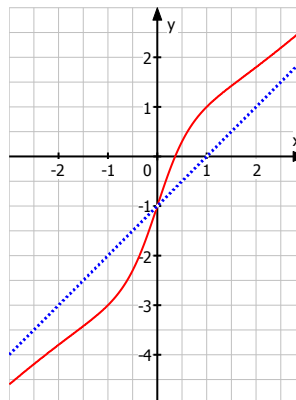
$$g(x) = \frac{0,5x^2-2}{1-x} = -0,5x - 0,5 + \frac{1,5}{x-1}$$

Asymptote $y = -0,5x - 0,5$



c) $h(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2+1}$; $D = \mathbb{R}$

Asymptote $y = x - 1$



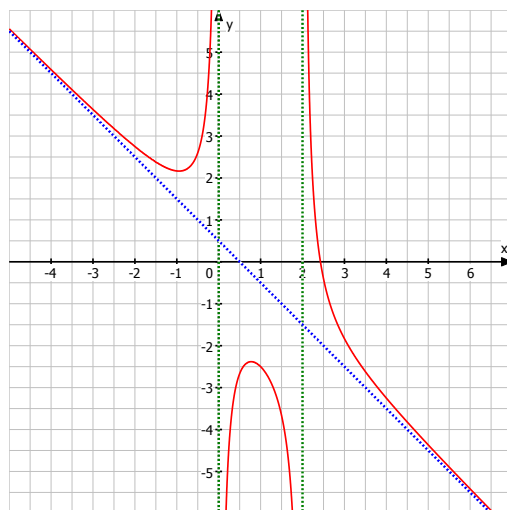
d) $k(x) = \frac{x}{2x-4} - \frac{x^2+1}{x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

$$k(x) = \frac{-2x^3+5x^2-2x+4}{2x \cdot (x-2)} = -x + 0,5 + \frac{2}{x \cdot (x-2)}$$

Asymptote $y = -x + 0,5$

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \frac{4}{0^{\pm} \cdot (-2)} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = \frac{-16+20-4+4}{8 \cdot 0^{\pm}} = \pm \infty$$



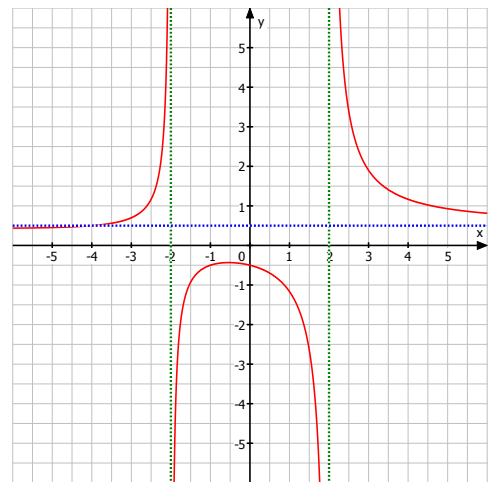
$$e) m(x) = \frac{2+x+0,5x^2}{x^2-4} = \frac{2+x+0,5x^2}{(x-2) \cdot (x+2)}; D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} m(x) = \frac{2-2+2}{(-4) \cdot 0^\pm} = \mp \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} m(x) = \frac{2+2+2}{0^\pm \cdot 4} = \pm \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} m(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 0,5}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0 \pm 0 + 0,5}{1-0} = 0,5$$

Asymptote $y = 0,5$



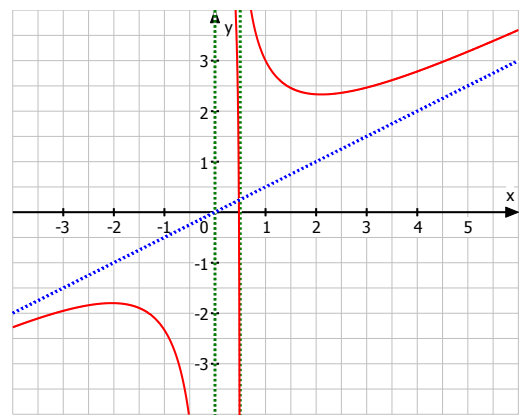
$$f) n(x) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{x^3+4x-2}{x \cdot (2x-1)}; D = \mathbb{R} \setminus \{0; 0,5\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} n(x) = \frac{0+0-2}{0^\pm \cdot (-1)} = \pm \infty$$

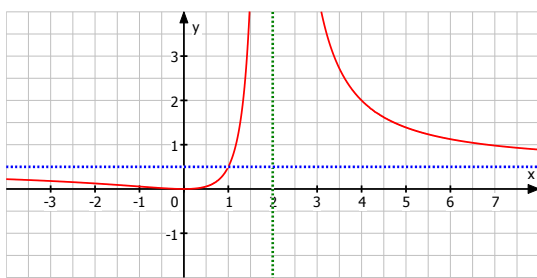
$$\lim_{x \rightarrow 0,5} n(x) = \frac{0,125+2-2}{0,5 \cdot 0^\pm} = \pm \infty$$

$$n(x) = \frac{x^3+4x-2}{2x^2-x} = 0,5x + \frac{5x-2}{2x^2-x}$$

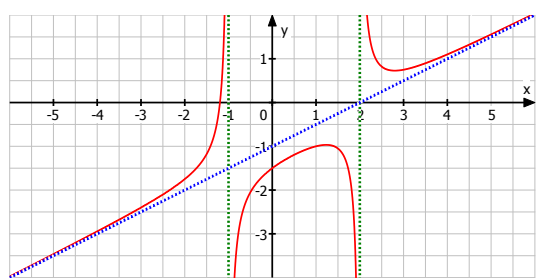
Asymptote $y = 0,5x$



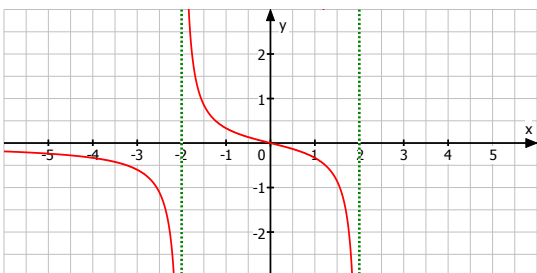
$$2. a) f(x) = \frac{0,5x^2}{(x-2)^2}$$



$$b) f(x) = 0,5x - 1 + \frac{1}{(x+1) \cdot (x-2)}$$



$$c) f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$



$$d) f(x) = \frac{x^2-4}{x^4}$$

