# Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 17.03.2017 * Gruppe A

1. Gegeben ist Funktion f mit $f(x) = \dfrac{5 + 2x}{\sqrt{x^2 + 5}}$ .

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte des Graphen von f.

   c) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f.

2. Im $R^3$ sind die Punkte A(2/3/4) , B(3/1/6) , D(4/2/2) und S(8/3/10) gegeben.
   Die drei Punkte A, B und D legen die Ebene E fest.

   a) Begründen Sie, dass man das Dreieck ABD mit einem Punkt C zu einem Quadrat ABCD erweitern kann und berechnen Sie die Koordinaten von C.

   b) Zeigen Sie, dass die dreiseitige Pyramide ABDS das Volumen V = 9 besitzt.

   c) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.

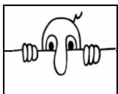
   d) Spiegelt man den Punkt S an der Ebene E, so erhält man den Spiegelpunkt $S^*$.
      Anna behauptet, dass der Punkt $S^*$ die Koordinaten $S^*(0/-5/6)$ besitzt.
      Begründen Sie genau, ob Annas Behauptung stimmt.

3. Im $R^3$ ist das Dreieck ABC mit A(5/4/3) , B(6/6/3) und C(7/7/-1) gegeben.
   Durch diese drei Punkte ist die Ebene E festgelegt.

   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha$ im Dreieck ABC auf $0{,}1^o$ genau und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   b) Eine Kugel $k ( M / r_1 = 9 )$ soll die Ebene E im Punkt A berühren.
      Bestimmen Sie die Koordinaten aller möglichen Mittelpunkte M.

   c) Eine Kugel $k ( N / r_2 = 5 )$ soll die Ebene E in einem Kreis $k ( A / \rho = 4 )$ schneiden.
      Bestimmen Sie die Koordinaten eines geeigneten Mittelpunktes N.

|  | Aufgabe | 1a | b | c | 2a | b | c | d | 3a | b | c | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte | 2 | 8 | 3 | 4 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 | 41 |

Gutes Gelingen! G.R.

# Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 17.03.2017 * Gruppe B

1. Gegeben ist Funktion f mit $f(x) = \dfrac{6+2x}{\sqrt{x^2+3}}$ .

   a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und alle Nullstellen von f.

   b) Bestimmen Sie alle Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte des Graphen von f.

   c) Ermitteln Sie den Wertebereich der Funktion f.

2. Im $R^3$ sind die Punkte A(4/3/2) , B(6/1/3) , D(2/2/4) und S(10/3/8) gegeben.
   Die drei Punkte A, B und D legen die Ebene E fest.

   a) Begründen Sie, dass man das Dreieck ABD mit einem Punkt C zu einem Quadrat ABCD erweitern kann und berechnen Sie die Koordinaten von C.

   b) Zeigen Sie, dass die dreiseitige Pyramide ABDS das Volumen V = 9 besitzt.

   c) Bestimmen Sie den Abstand d des Punktes S von der Ebene E.

   d) Spiegelt man den Punkt S an der Ebene E, so erhält man den Spiegelpunkt $S^*$.
   Bernd behauptet, dass der Punkt $S^*$ die Koordinaten $S^*(6/-5/0)$ besitzt.
   Begründen Sie genau, ob Bernds Behauptung stimmt.

3. Im $R^3$ ist das Dreieck ABC mit A(3/4/5) , B(3/6/6) und C(-1/7/7) gegeben.
   Durch diese drei Punkte ist die Ebene E festgelegt.

   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels $\alpha$ im Dreieck ABC auf $0{,}1^o$ genau und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

   b) Eine Kugel $k(M / r_1 = 9)$ soll die Ebene E im Punkt A berühren.
   Bestimmen Sie die Koordinaten aller möglichen Mittelpunkte M.

   c) Eine Kugel $k(N / r_2 = 5)$ soll die Ebene E in einem Kreis $k(A / \rho = 4)$ schneiden.
   Bestimmen Sie die Koordinaten eines geeigneten Mittelpunktes N.

| | Aufgabe | 1a | b | c | 2a | b | c | d | 3a | b | c | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte | 2 | 8 | 3 | 4 | 3 | 3 | 5 | 5 | 4 | 4 | 41 |

Gutes Gelingen! G.R.

**Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 17.03.2017 * Gruppe A * Lösung**

1. a) $f(x)=\dfrac{5+2x}{\sqrt{x^2+5}}$ ; $D_f=\mathbb{R}$ und $f(x)=0 \Leftrightarrow 5+2x=0 \Leftrightarrow x_1=-2{,}5$

b) $f'(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^2+5}-(5+2x)\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5}=\dfrac{2\cdot(x^2+5)-(5+2x)\cdot x}{(x^2+5)\cdot\sqrt{x^2+5}}=\dfrac{10-5x}{(x^2+5)\cdot\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 10-5x=0 \Leftrightarrow x_2=2$ und $f(2)=\dfrac{5+4}{\sqrt{4+5}}=3$

$f'(x)$ wechselt bei $x_2=2$ das Vorzeichen von + auf −, d.h. $G_f$ hat bei $x_2$ einen HOP(2 / 3).

c) Wegen $D_f=\mathbb{R}$ und einzigem Extrempunkt bei $x_2=2$ gilt $f(x)\le 3$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{|x|}=\pm 2$ , also $W_f=]-2\,;3]$

(Hinweis: $f(x)>-2$ für alle $x\in\mathbb{R}$ wegen $f'(x)>0$ für $x\in\mathbb{R}^-$)

2. a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{9}=3$ und $\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}=2+2-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

$\vec{C}=\vec{D}+\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4+1\\2-2\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\4\end{pmatrix}$ und C(5 / 0 / 4) liefert damit das gesuchte Quadrat ABCD.

b) $V_{ABDS}=\dfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AS}\circ(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\right|$ mit $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2\\4+2\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}$; mit $\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$

also $V_{ABDS}=\dfrac{1}{6}\cdot|6\cdot6+0\cdot6+6\cdot3|=9$

c) $V_{ABDS}=9$ und $V_{ABDS}=\dfrac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABD}\cdot h$ mit $h=d$ und

$A_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6\cdot6+6\cdot6+3\cdot3}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{81}=4{,}5$

also $d=\dfrac{3\cdot V_{ABDS}}{A_{\Delta ABD}}=\dfrac{3\cdot9}{4{,}5}=6$

d) $S^*$ ist genau dann der Spiegelpunkt von S, wenn gilt:

$\overrightarrow{S^*S}$ steht senkrecht auf der Ebene E, d.h. $\overrightarrow{S^*S}\parallel\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ und

der Mittelpunkt M von $[S^*S]$ liegt in der Ebene E, und das gilt falls $\overrightarrow{AS^*}=\overrightarrow{AS}$.

$\overrightarrow{S^*S}=\begin{pmatrix}8-0\\3+5\\10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}=\dfrac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\3\end{pmatrix}=\dfrac{4}{3}\cdot\vec{n}\parallel\vec{n}$ ; ( $\vec{M}=\dfrac{1}{2}\cdot(\vec{S^*}+\vec{S})=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}8+0\\3-5\\10+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\8\end{pmatrix}$ ) und

$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS^*}=\begin{pmatrix}0-2\\-5-3\\6-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-8\\2\end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AS}\right|=\sqrt{36+36}=6\cdot\sqrt{2}$ und $\left|\overrightarrow{AS^*}\right|=\sqrt{4+64+4}=6\cdot\sqrt{2}$

Annas Behauptung stimmt also.

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ ; $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{2+6+0}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{4+9+16}} = \dfrac{8}{\sqrt{5 \cdot 29}} \Rightarrow$

$\alpha = \cos^{-1} \dfrac{8}{\sqrt{5 \cdot 29}} = 48{,}366...^{\circ} \approx 48{,}4^{\circ}$ und

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8-0 \\ 0+4 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{64+16+1} = 4{,}5$

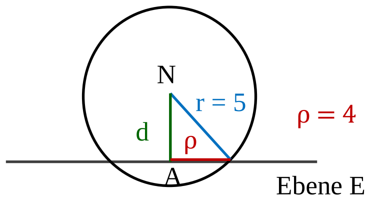
b) Für die Mittelpunkte M muss gelten:

$\overrightarrow{M_{1/2}} = \vec{A} \pm 9 \cdot \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ mit $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ also $\overrightarrow{M_{1/2}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm 9 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ also

$\overrightarrow{M_1} = \begin{pmatrix} 5-8 \\ 4+4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_2} = \begin{pmatrix} 5+8 \\ 4-4 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ; $M_1(-3/8/2)$ und $M_2(13/0/4)$

c) Nach Pythagoras gilt für den Abstand

$d = \left|\overrightarrow{AN}\right|$ und $d^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow d = 3$




also $\overrightarrow{N_{1/2}} = \vec{A} \pm 3 \cdot \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \pm \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

z.B. $\overrightarrow{N_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 16/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$ also $N_1(\frac{7}{3}/\frac{16}{3}/\frac{8}{3})$ bzw. $N_2(\frac{23}{3}/\frac{8}{3}/\frac{10}{3})$

**Q11 * Mathematik m1 * 1. Klausur am 17.03.2017 * Gruppe B * Lösung**

1. a) $f(x) = \dfrac{6+2x}{\sqrt{x^2+3}}$ ; $D_f = \mathbb{R}$ und $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6+2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$

b) $f'(x) = \dfrac{2\cdot\sqrt{x^2+3} - (6+2x)\cdot\dfrac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3} = \dfrac{2\cdot(x^2+3)-(6+2x)\cdot x}{(x^2+3)\cdot\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{6-6x}{(x^2+5)\cdot\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6-6x = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1$ und $f(1) = \dfrac{6+2}{\sqrt{1+3}} = 4$

$f'(x)$ wechselt bei $x_2 = 1$ das Vorzeichen von + auf −, d.h. $G_f$ hat bei $x_2$ einen HOP(1/4).

c) Wegen $D_f = \mathbb{R}$ und einzigem Extrempunkt bei $x_1 = 1$ gilt $f(x) \le 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x}{|x|} = \pm 2$ , also $W_f = ]-2\,;\,4]$

(Hinweis: $f(x) > -2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ wegen $f'(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}^-$)

2. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{9} = 3$ und $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = -4+2+2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\vec{C} = \vec{D} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 2-2 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und C(4/0/5) liefert damit das gesuchte Quadrat ABCD.

b) $V_{ABDS} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AS} \circ (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD})\right|$ mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ -2-4 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$; mit $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

also $V_{ABDS} = \dfrac{1}{6}\cdot\left|-3\cdot 6 + 0\cdot 6 - 6\cdot 6\right| = \dfrac{1}{6}\cdot\left|-54\right| = 9$

c) $V_{ABDS} = 9$ und $V_{ABDS} = \dfrac{1}{3}\cdot A_{\Delta ABD}\cdot h$ mit $h = d$ und

$A_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot 3+6\cdot 6+6\cdot 6} = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{81} = 4{,}5$

also $d = \dfrac{3\cdot V_{ABDS}}{A_{\Delta ABD}} = \dfrac{3\cdot 9}{4{,}5} = 6$

d) $S^*$ ist genau dann der Spiegelpunkt von S, wenn gilt:

$\overrightarrow{S^*S}$ steht senkrecht auf der Ebene E, d.h. $\overrightarrow{S^*S} \parallel \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ und

der Mittelpunkt M von $[S^*S]$ liegt in der Ebene E, und das gilt falls $\overline{AS^*} = \overline{AS}$.

$\overrightarrow{S^*S} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 3+5 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -\dfrac{4}{3}\cdot\vec{n} \parallel \vec{n}$ ; ( $\vec{M} = \dfrac{1}{2}\cdot(\vec{S^*} + \vec{S}) = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 10+6 \\ 3-5 \\ 8+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ) und

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AS^*} = \begin{pmatrix} 6-4 \\ -5-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{36+36} = 6\cdot\sqrt{2}$ und $\left|\overrightarrow{AS^*}\right| = \sqrt{4+64+4} = 6\cdot\sqrt{2}$

Bernds Behauptung stimmt also.

3. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{0+6+2}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9+4}} = \dfrac{8}{\sqrt{5 \cdot 29}} \Rightarrow$

$\alpha = \cos^{-1} \dfrac{8}{\sqrt{5 \cdot 29}} = 48{,}366...^{o} \approx 48{,}4^{o}$ und

$A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$ mit $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -4-0 \\ 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ also $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1+16+64} = 4{,}5$

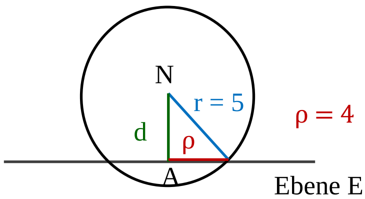
b) Für die Mittelpunkte M muss gelten:

$\overrightarrow{M_{1/2}} = \vec{A} \pm 9 \cdot \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ mit $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ also $\overrightarrow{M_{1/2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 9 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ also

$\overrightarrow{M_1} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 4-4 \\ 5+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_2} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4+4 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $M_1(4/0/13)$ und $M_2(2/8/-3)$

c) Nach Pythagoras gilt für den Abstand

$d = \left|\overrightarrow{AN}\right|$ und $d^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow d = 3$




also $\overrightarrow{N_{1/2}} = \vec{A} \pm 3 \cdot \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \pm \dfrac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

z.B. $\overrightarrow{N_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 8/3 \\ 23/3 \end{pmatrix}$ also $N_1(\frac{23}{3}/\frac{8}{3}/\frac{10}{3})$ bzw. $N_2(\frac{8}{3}/\frac{16}{3}/\frac{7}{3})$