Q11 * Mathematik m3 * Klausur am 12.11.2014 * Gruppe A * Lösung

1. a) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{4x - 4} = \frac{(x-2)\cdot(x+1)}{4\cdot(x-1)} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ und zwei NSt. $x_1 = -1$; $x_2 = 2$

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ > \\ <}} \frac{x^2 - x - 2}{4(x-1)} = \text{"}\frac{-2}{0^{\pm}}\text{"} = \mp\infty$ (und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x - 1 - \frac{2}{x}}{4 - \frac{4}{x}} = \text{"}\frac{\pm\infty}{4}\text{"}\ \pm\infty$)

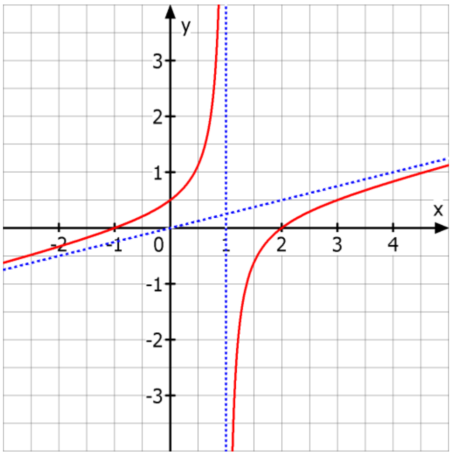
   $(x^2 - x - 2) : (4x - 4) = 0{,}25x + \frac{-2}{4x-4}$; wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{4x-4} = 0^{\mp}$ folgt :

   $-(x^2 - x)$

   $\quad - 2$

   die schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$ hat die Funktionsgleichung $y = 0{,}25x$.

   c)

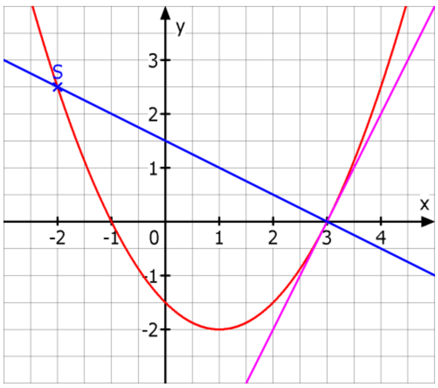


2. a) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot(x-3) = 0{,}5\cdot(x^2 - 2x - 3)$

   $m_T = f'(3) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{0{,}5\cdot(x+1)\cdot(x-3) - 0}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} 0{,}5\cdot(x+1) = 0{,}5\cdot 4 = 2$

   Tangentengleichung: $y = 2\cdot x + t$; P(3/0) eingesetzt : $0 = 2\cdot 3 + t \Rightarrow t = -6$

   Die Tangentengleichung lautet also $y = 2x - 6$.



   b) Für die Normalensteigung m_N gilt $m_N \cdot m_T = -1$,

   also $m_N = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

   und P(3/0) eingesetzt in $y = -0{,}5x + t$ liefert

   $0 = -0{,}5\cdot 3 + t$ also $t = 1{,}5$.

   Gleichung der Normale: $y = -0{,}5x + 1{,}5$

   Schnittpunkt S : $f(x) = -0{,}5x + 1{,}5 \Leftrightarrow$

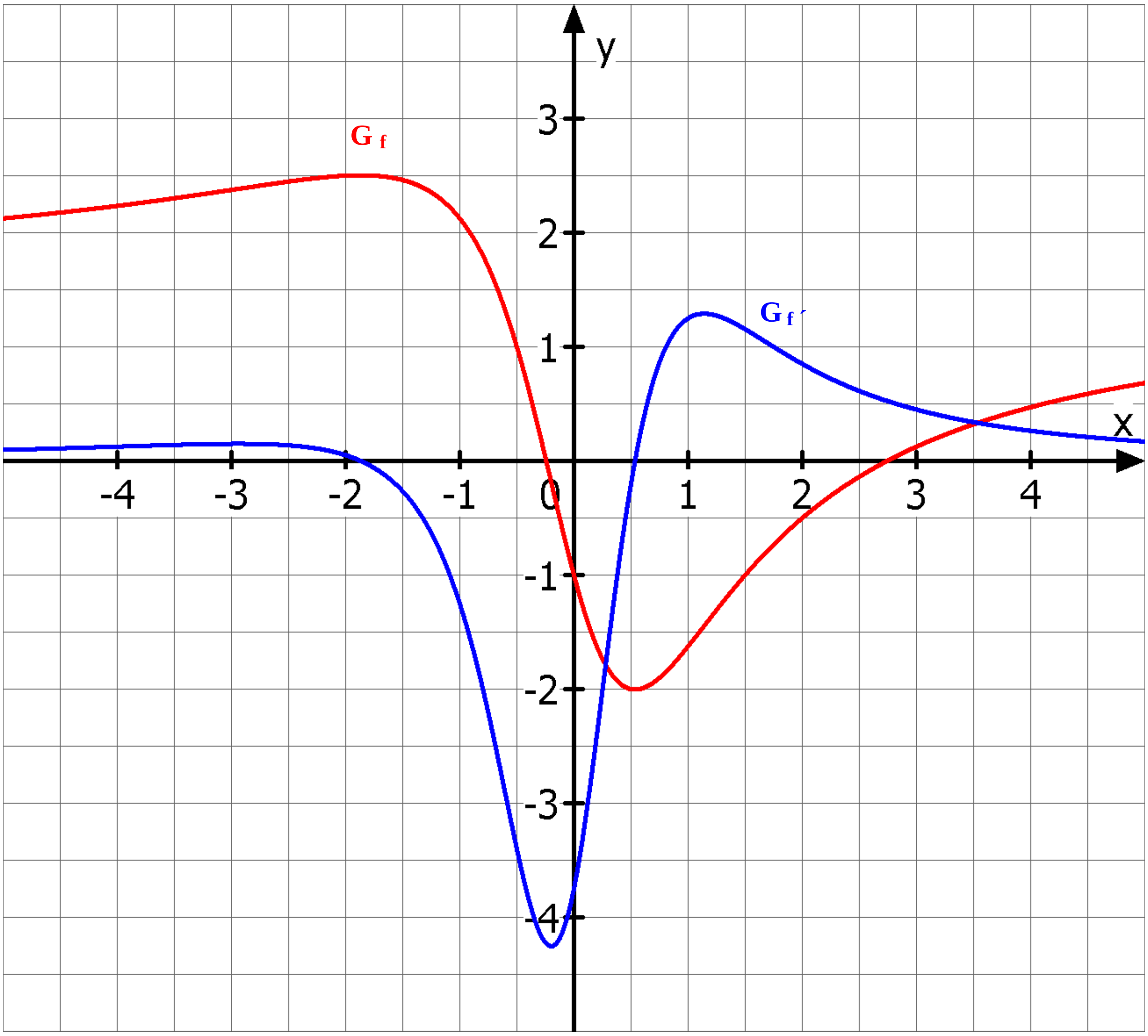
   $0{,}5\cdot(x^2 - 2x - 3) = -0{,}5x + 1{,}5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$

   $(x-3)\cdot(x+2) = 0 \Leftrightarrow x_S = -2$ (und $x_P = 3$) $y_S = -0{,}5\cdot(-2) + 1{,}5 = 2{,}5$ also $S(-2/2{,}5)$

3. Wenn g' eine doppelte Nullstelle bei x_0 besitzt, dann hat G_g bei x_0 eine waagrechte Tangente, aber das Vorzeichen von $g'(x)$ ändert sich bei x_0 nicht. Daher ist g an der Stelle x_0 streng monoton und der Graph von g hat bei x_0 einen Terrassenpunkt.

Arbeitsblatt zur Klausur am 12.11.2014 * Q11 * Mathematik m3 * Gruppe A * Lösung

4.



Q11 * Mathematik m3 * Klausur am 12.11.2014 * Gruppe B * Lösung

1. a) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{4x + 4} = \dfrac{(x+2)\cdot(x-1)}{4\cdot(x+1)} \quad \Rightarrow \quad D_f = R\setminus\{-1\}$ und zwei NSt. $x_1 = -2\,;\; x_2 = 1$

   b) $\lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\underset{<}{\to}} -1} \dfrac{x^2 + x - 2}{4(x+1)} = "\dfrac{-2}{0^{\pm}}" = \mp\infty$ (und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x + 1 - \frac{2}{x}}{4 + \frac{4}{x}} = "\dfrac{\pm\infty}{4}"\ \pm\infty$)

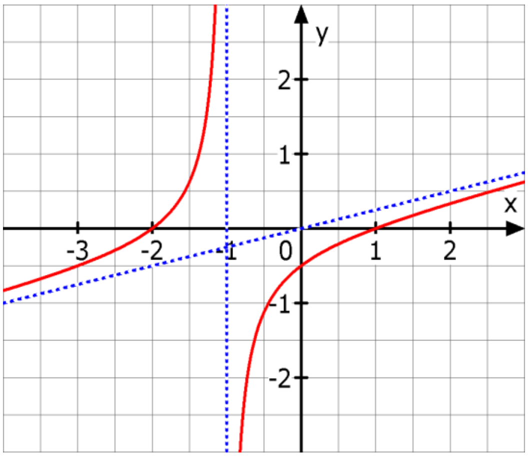
   $(x^2 + x - 2) : (4x+4) = 0{,}25x + \dfrac{-2}{4x+4}$; wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2}{4x+4} = 0^{\mp}$ folgt :

   $-(x^2 + x)$

   $\qquad -\,2$

   Die schräg liegende Asymptote für $x \to \pm\infty$ hat die Funktionsgleichung $y = 0{,}25x$.

   c)

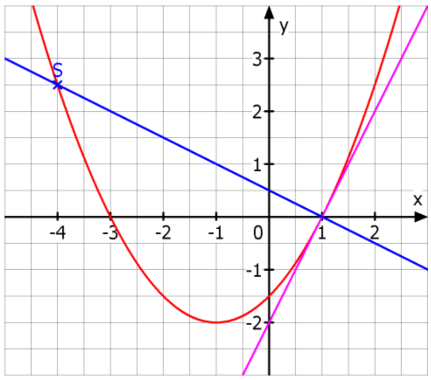


2. a) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(x+3) = 0{,}5\cdot(x^2 + 2x - 3)$

   $m_T = f'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{0{,}5\cdot(x-1)\cdot(x+3) - 0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} 0{,}5\cdot(x+3) = 0{,}5\cdot 4 = 2$

   Tangentengleichung: $y = 2\cdot x + t$; $P(1/0)$ eingesetzt : $0 = 2\cdot 1 + t \Rightarrow t = -2$

   Die Tangentengleichung lautet also $y = 2x - 2$.



   b) Für die Normalensteigung m_N gilt $m_N \cdot m_T = -1$,

   also $m_N = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$

   und $P(1/0)$ eingesetzt in $y = -0{,}5x + t$ liefert

   $0 = -0{,}5\cdot 1 + t$ also $t = 0{,}5$.

   Gleichung der Normale: $y = -0{,}5x + 0{,}5$

   Schnittpunkt S : $f(x) = -0{,}5x + 0{,}5 \;\Leftrightarrow$

   $0{,}5\cdot(x^2 + 2x - 3) = -0{,}5x + 0{,}5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

   $(x-1)\cdot(x+4) = 0 \Leftrightarrow x_S = -4$ (und $x_P = 1$) $y_S = -0{,}5\cdot(-4) + 0{,}5 = 2{,}5$ also $S(-4/2{,}5)$

3. Wenn g' eine doppelte Nullstelle bei x_o besitzt, dann hat G_g bei x_o eine waagrechte Tangente, aber das Vorzeichen von $g'(x)$ ändert sich bei x_o nicht. Daher ist g an der Stelle x_o streng monoton und der Graph von g hat bei x_o einen Terrassenpunkt.

Arbeitsblatt zur Klausur am 12.11.2014 * Q11 * Mathematik m3 * Gruppe B * Lösung

4.