

Q12 * Astrophysik * Verallgemeinerung des dritten Gesetzes von Kepler

Zwei Himmelskörper vergleichbarer Masse (hier zwei Sterne S_1 und S_2) bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt S . Für Kreisbahnen mit den Radien r_1 und r_2 kann man für die Umlaufzeit T und den Abstand r der beiden Körper folgenden Zusammenhang herleiten:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \quad \text{mit } r = r_1 + r_2 \quad \text{und} \quad m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

Diese Beziehung gilt auch für Ellipsenbahnen. Dann ist r durch die Summe der beiden großen

Halbachsen zu ersetzen, also
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot (m_1 + m_2)} \quad \text{mit } r = a_1 + a_2 \quad \text{und} \quad m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 .$$

(Von einem der beiden Sterne aus betrachtet scheint sich der andere auf einer Ellipsenbahn mit der großen Halbachse $a = a_1 + a_2$ sowie der Exzentrizität $e = e_1 + e_2$ zu bewegen.)

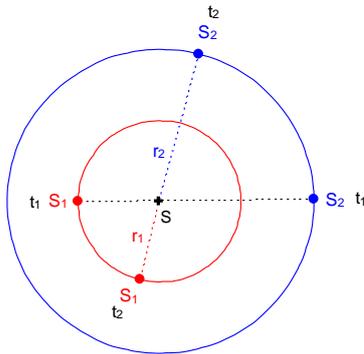


Abb. 1

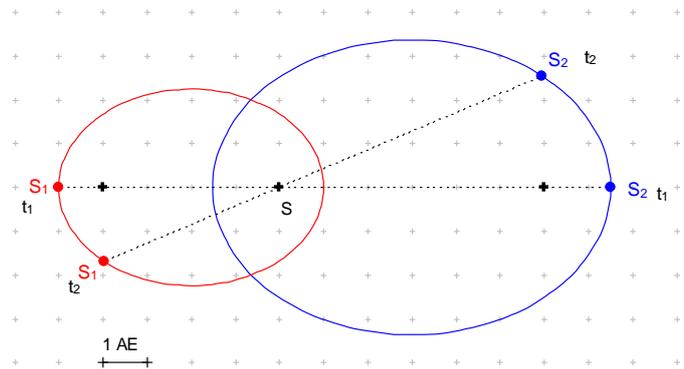


Abb. 2

Abbildung 2 zeigt ein Doppelsternsystem mit einer Umlaufdauer von 9,6 Jahren und dem Maßstab $1 \text{ AE} \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m}$. Periastron und Apastron kennzeichnen die Orte des kleinsten und größten Abstands der beiden Sterne voneinander. Lösen Sie mit diesen Angaben folgende Aufgaben.

- Wie groß sind die großen Halbachsen a_1 und a_2 und die jeweiligen Exzentrizitäten e_1 und e_2 ?
- Zeigen Sie, dass für die Periastron- und Apastrondistanz gilt:

$$x_{\text{Periastron}} = a_1 + a_2 - (e_1 + e_2) \quad \text{und} \quad x_{\text{Apastron}} = a_1 + a_2 + (e_1 + e_2)$$

- Bestimmen Sie das Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ und die Gesamtmasse $m_1 + m_2$ der beiden Sterne.
- Ermitteln Sie die Einzelmassen beider Sterne in Vielfachen der Sonnenmasse $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.
- Für Experten: Begründen Sie, dass beide Ellipsen die gleiche numerische Exzentrizität $e_1 = e_2$ haben müssen.

Aufgabe Sirius

Sirius ist der hellste Stern des Himmels und mit einer Entfernung von nur 8,6 Lichtjahren einer der nächsten Sterne. Außerdem ist er mit einem Alter von nur etwa 240 Millionen Jahren noch sehr jung. Schon 1844 erkannte der Astronom Bessel nach langjährigen Beobachtungen, dass Sirius einen Begleitstern hat. Der Begleitstern (Sirius B, ein sogenannter weißer Zwerg) ist im Gegensatz zu Sirius (Sirius A) auch heute nur schwer zu beobachten, da er von Sirius A überstrahlt wird. Die beiden Sterne „umrunden“ sich in ziemlich genau 50 Jahren auf relativ exzentrischen Bahnen, und das Verhältnis der großen Halbachsen beträgt etwa $a_{\text{Sirius A}} : a_{\text{Sirius B}} = 1,0 : 2,1$.

Für die Summe der großen Halbachsen gilt $a_{\text{Sirius A}} + a_{\text{Sirius B}} = a = 20 \text{ AE}$ ($e = e_1 + e_2 \approx 0,6$).

Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Massen von Sirius A und Sirius B sowie die Apastron- und Periastrondistanz der beiden Sterne.