

Q12 * Astrophysik * Klausur am 19.04.2013

1. Wega ist der Hauptstern des Sternbildes Leier.

Die jährliche Parallaxe von Wega beträgt $0,130''$ und pro Jahr bewegt sich Wega um ca. $0,350''$ relativ zum weit entfernten Fixsternhimmel.

In ihrem Spektrum ist die H_{α} -Linie ($\lambda_0 = 656,28\text{nm}$) etwas verschoben und wird bei $656,23\text{nm}$ gemessen.

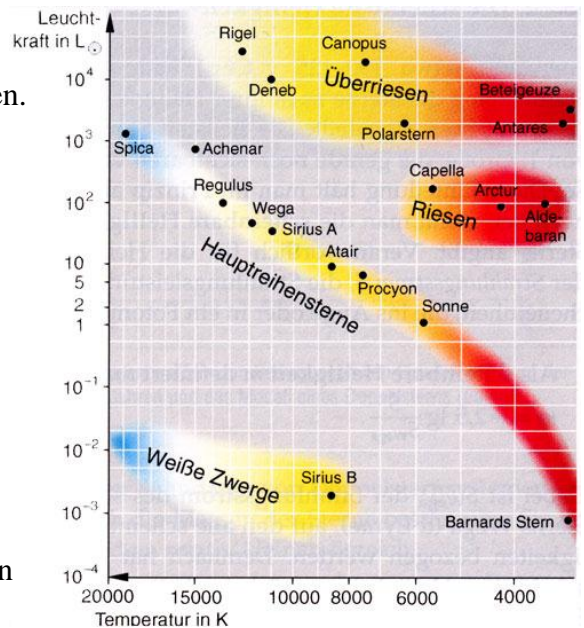
- Bestimmen Sie die Entfernung von Wega und ihre Tangentialgeschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die Radial- und die Gesamtgeschwindigkeit von Wega.
Nähert sich Wega unserer Sonne oder entfernt sie sich?

2. Prokyon ist der hellste Stern im Sternbild Kleiner Hund.

Seine scheinbare Helligkeit beträgt $0,34\text{mag}$.

Für die folgenden Berechnungen sollen weitere Daten aus dem abgebildeten HRD entnommen werden.

- Unsere Sonne ist ein G2 Hauptreihenstern.
Zu welcher Spektralklasse etwa gehört Prokyon?
- Schätzen Sie die absolute Helligkeit von Prokyon ab! (Ergebnis: $M \approx 2,7\text{Mag}$)
- Wie weit etwa ist Prokyon von uns entfernt?
Geben Sie diese Entfernung auch in Lj an.
Welche jährliche Parallaxe sollte man demnach für Prokyon messen? (Teilergebnis: $r = 3,4\text{pc}$)
- Schätzen Sie den Sternradius von Prokyon in Vielfachen des Sonnenradius ab.
- Schätzen Sie die Masse von Prokyon in Vielfachen der Sonnenmasse ab. (Ergebnis: $m^* \approx 1,9$)
- Prokyon befindet sich seit etwa 1,7 Milliarden Jahren auf der Hauptreihe.
Wie lange etwa wird Prokyon noch ein Hauptreihenstern sein?
Beschreiben Sie in Stichpunkten, welche Entwicklung Prokyon anschließend nehmen wird.
- Prokyon hat einen leuchtschwachen Begleiter (Prokyon B), der etwa 0,6 Sonnenmassen besitzt. Die Umlaufperiode des Doppelsternsystems beträgt 41 Jahre.
Bestimmen Sie den Abstand der beiden Sterne voneinander. (Sie dürfen dabei Kreisbahnen voraussetzen!) Unter welchem maximalen Winkelabstand kann man die beiden Sterne demnach von der Erde aus beobachten? (Teilergebnis: Abstand $d = 2,4 \cdot 10^{12}\text{m}$)



Daten unserer Sonne: $M_{\odot} = 4,8\text{Mag}$, Hauptreihen-Verweildauer ca. 10^{10} Jahre, $T = 5800\text{K}$

Längeneinheiten: $1\text{pc} = 3,26\text{Lj} = 3,086 \cdot 10^{16}\text{m}$ Lichtgeschwindigkeit: $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Kugeloberfläche: $A_{\text{Kugel}} = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$ Gravitationskonstante: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

Aufgabe	1a	b	2a	b	c	d	e	f	g	Summe
Punkte	5	5	2	4	5	4	3	6	6	40



Gutes Gelingen! G.R.

Q12 * Astrophysik * Klausur am 19.04.2013 * Lösung

1. a) $r = \frac{1''}{p} \cdot \text{pc} = \frac{1''}{0,130''} \cdot \text{pc} = 7,7 \text{ pc} = 25 \text{ Lj}$

$$v_t = \frac{r \cdot \tan(0,350^\circ)}{1 \text{ a}} = \frac{7,7 \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} \cdot \tan \frac{0,350^\circ}{3600}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}} = 13 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

b) $v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = \frac{656,23 \text{ nm} - 656,28 \text{ nm}}{656,28 \text{ nm}} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -23 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ Wega nähert sich!

$$v_{\text{ges}} = \sqrt{v_r^2 + v_t^2} = \sqrt{23^2 + 13^2} \frac{\text{km}}{\text{s}} = 26 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

2. a) Prokyon ist ein Hauptreihenstern der Spektralklasse F5 (F - Hauptreihenstern als Antwort ausreichend.)

b) $\frac{L_p}{L_\odot} \approx 7$ (aus HRD) und $M_p - M_\odot = -2,5 \cdot \lg \frac{L_p}{L_\odot} \Rightarrow$

$$M_p = M_\odot - 2,5 \cdot \lg \frac{L_p}{L_\odot} = 4,8 - 2,5 \cdot \lg 7 = 2,7 \text{ Mag}$$

- c) Mit dem Entfernungsmodul gilt:

$$m - M = 5 \cdot \lg \frac{r}{10 \text{ pc}} \Rightarrow r = 10 \text{ pc} \cdot 10^{\frac{m-M}{5}} = 10 \text{ pc} \cdot 10^{\frac{0,34-2,7}{5}} = 10 \text{ pc} \cdot 10^{\frac{0,34-2,7}{5}} = 3,4 \text{ pc} = 11 \text{ Lj}$$

$$r = \frac{1''}{p} \cdot \text{pc} \Rightarrow p = \frac{1''}{r} \cdot \text{pc} = \frac{1''}{3,4 \text{ pc}} \cdot \text{pc} = 0,29''$$

- d) Stefan-Boltzmann:

$$T_p \approx 7500 \text{ K} \text{ (aus HRD) und } L = \sigma \cdot A \cdot T \text{ mit } A = 4 \cdot R^2 \cdot \pi \Rightarrow$$

$$7 \approx \frac{L_p}{L_\odot} = \frac{\sigma \cdot A_p \cdot T_p^4}{\sigma \cdot A_\odot \cdot T_\odot^4} = \frac{R_p^2 \cdot T_p^4}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^4} \Rightarrow R_p = R_\odot \cdot \sqrt{7 \cdot \frac{T_\odot^4}{T_p^4}} = R_\odot \cdot \sqrt{7 \cdot \frac{(5800 \text{ K})^4}{(7500 \text{ K})^4}} = 1,6 \cdot R_\odot$$

- e) Masse-Leuchtkraft-Beziehung für Hauptreihensterne:

$$L \sim m^3 \Rightarrow 7 = \frac{L_p}{L_\odot} = \frac{m_p^3}{m_\odot^3} \Rightarrow m_p = m_\odot \cdot \sqrt[3]{7} \approx 1,9 m_\odot$$

- f) Verweildauer τ auf der Hauptreihe:

$$\tau \sim m \text{ und } \tau \sim \frac{1}{L} \sim \frac{1}{m^3} \Rightarrow \tau \sim \frac{1}{m^2} \text{ und } \frac{\tau_p}{\tau_\odot} = \frac{m_\odot^2}{m_p^2} = \frac{1}{1,9^2} = 0,28$$

$$\tau_p = 0,28 \cdot \tau_\odot = 0,28 \cdot 10^{10} \text{ a} = 2,8 \text{ Milliarden Jahre ; mit } 2,8 - 1,7 = 1,1 \text{ gilt :}$$

Prokyon wird also noch etwa 1,1 Milliarden Jahre auf der Hauptreihe verweilen.

Weitere Entwicklung von Prokyon:

Nach dem Wasserstoffbrennen wird das Heliumbrennen in Prokyon einsetzen, und Prokyon wird dann zu einem Roten Riesen. Am Ende dieses Stadiums wird Prokyon mehrmals große Mengen seiner Gasatmosphäre „wegblasen“ (Planetarischer Nebel) und schließlich zu einem Weißen Zwerg werden. (Falls die Restmasse größer als 1,4 Sonnenmasse ist, wird ein Neutronenstern entstehen!) Dieser Weißer Zwerg kühlt dann langsam ab und so wird Prokyon schließlich als Brauner Zwerg enden.

g) Für den Abstand d der beiden Sterne gilt (Zweikörperproblem)

$$\omega^2 = G \cdot \frac{m}{d^3} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad m = m_{P,A} + m_{P,B} = (1,9 + 0,6) \cdot m_{\odot} = 2,5 \cdot m_{\odot} \Rightarrow$$

$$2,5 m_{\odot} = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{T^2 \cdot G} \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{2,5 m_{\odot} \cdot T^2 \cdot G}{4\pi^2}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{2,5 \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot (41 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s})^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}}{4\pi^2}} = 2,4 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

Abstand $d = 2,4 \cdot 10^{12} \text{ m}$ und Entfernung $r = 3,4 \text{ pc} = 1,0 \cdot 10^{17} \text{ m} \Rightarrow$

$$\tan \varphi = \frac{d}{r} = \frac{2,4 \cdot 10^{12} \text{ m}}{1,0 \cdot 10^{17} \text{ m}} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}(2,4 \cdot 10^{-5}) = 0,001375 \dots^{\circ} = 5,0''$$

Der Winkelabstand der beiden Sterne beträgt also 5,0 Bogensekunden.