Q12 * Astrophysik * Lösungen zu den Aufgaben zur Sternentwicklung

Aufgaben zum Hauptreihenstadium

1. Begründen Sie, dass für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt: $\tau \sim \frac{1}{m^2}$.
2. Zeigen Sie, dass aus $L^* \leq 10^5$ für die Masse m eines Sterns $m < 50 \cdot m_\odot$ folgt.
3. Schätzen Sie für sehr massereiche Hauptreihensterne (B0 mit $M \approx -5$) die Masse und die Verweildauer auf der Hauptreihe ab.

Lösungen

1. Für die Verweildauer τ auf der Hauptreihe gilt $\tau \sim \frac{1}{m^2}$, denn

   $\tau \sim m$, denn die Verweildauer ist proportional zur Masse des Brennstoffvorrats.

   $\tau \sim \frac{1}{L}$, denn je größer L umso größer der Brennstoffverbrauch.

   Wegen $L \sim m^3$ für Hauptreihensterne folgt damit $\tau \sim \frac{m}{L} \sim \frac{m}{m^3} = \frac{1}{m^2}$

2. Aus $L^* \leq 10^5$ folgt $m < 50 \cdot m_\odot$, denn

$$L \sim m^3 \;\Rightarrow\; L^* = \frac{L}{L_\odot} = \frac{m^3}{m_\odot^{\,3}} \;\Rightarrow\; m = m_\odot \cdot \sqrt[3]{\frac{L}{L_\odot}} = m_\odot \cdot \sqrt[3]{L^*} \leq m_\odot \cdot \sqrt[3]{10^5} \approx 46\,m_\odot < 50\,m_\odot$$

3. Für einen Hauptreihenstern B0 mit $M \approx -5$ gilt:

$$M - M_\odot = -2{,}5 \cdot \lg\frac{L}{L_\odot} \;\Rightarrow\; L^* = \frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4\cdot(M_\odot - M)} = 10^{0{,}4\cdot(4{,}8+5)} = 10^{3{,}92} \approx 8{,}3\cdot 10^3$$

$$L^* = \left(m^*\right)^3 \;\Rightarrow\; m^* = \sqrt[3]{L^*} = \sqrt[3]{8{,}3\cdot 10^3} \approx 20 \quad \text{also} \quad m \approx 20\,m_\odot$$

$$\tau \sim \frac{1}{m^2} \text{ und } \tau_\odot \approx 10^9 a \;\Rightarrow\; \frac{\tau}{\tau_\odot} = \frac{m_\odot^{\,2}}{m^2} = \frac{1}{20^2} \;\Rightarrow\; \tau = \frac{\tau_\odot}{20^2} = \frac{10\cdot 10^9 a}{400} \approx 25 \text{ Millionen Jahre}$$

Aufgaben zu Roten Riesen

1. Erklären Sie den Namen „Drei-Alpha-Prozess“ für die folgende Fusionsreaktion!
   He 4 + He 4 $\rightarrow$ Be 8 + γ – 0,09 MeV und Be 8 + He 4 $\rightarrow$ C 12 + γ + 7 MeV

Lösung: Es müssen hier (nahezu gleichzeitig) drei Heliumkerne zusammenstoßen.
Eine Gesamtgleichung lautet He4 + He 4 + He 4 $\rightarrow$ C 12 + γ + γ + 7 MeV

2. Beteigeuze im Sternbild Orion ist ein Pulsationsveränderlicher und etwa 600 Lj entfernt.
   Der Winkeldurchmesser des Sterns schwankt etwa zwischen 0,026´´ und 0,042´´ mit einer halbregelmäßigen Periode von ca. 2000 Tagen, die scheinbare Helligkeit nimmt Werte zwischen 0,3 und 0,6 an.
   Die Oberflächentemperatur beträgt etwa 3500K.

a) Berechnen Sie den maximalen und den minimalen Sternradius von Beteigeuze in Vielfachen der Astronomischen Einheit.
b) Welche relative maximale bzw. minimale Leuchtkraft L^* hat Beteigeuze?
c) Für die Masse von Beteigeuze findet man 20 Sonnenmassen angegeben. Warum stimmt dieser Wert nicht überein mit dem Wert, der sich aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung ergibt?

Lösung:

a) $d = 600\,\mathrm{Lj} = 600 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} = \dfrac{600 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}}\,\mathrm{AE} = 3{,}79 \cdot 10^{7}\,\mathrm{AE}\ \ (\approx 184\,\mathrm{pc})$

$$\tan\varphi_1 = \frac{2 \cdot R_1}{d} \ \Rightarrow\ R_1 = \frac{d \cdot \tan\varphi_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}79 \cdot 10^7\,\mathrm{AE} \cdot \tan\left(\frac{0{,}026^\circ}{3600}\right) \approx 2{,}4\,\mathrm{AE}$$

$$R_2 = \frac{d \cdot \tan\varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}79 \cdot 10^7\,\mathrm{AE} \cdot \tan\left(\frac{0{,}042^\circ}{3600}\right) \approx 3{,}9\,\mathrm{AE}$$

b) $L = \sigma \cdot 4R^2\pi \cdot T^4 \ \Rightarrow\ L_1^* = \dfrac{L_1}{L_\odot} = \dfrac{R_1^{\,2} \cdot T_1^{\,4}}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^{\,4}} = \dfrac{(2{,}4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2 \cdot (3500\,\mathrm{K})^4}{(6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^2 \cdot (5800\mathrm{K})^4} = 35 \cdot 10^3$

$$L_2^* = \frac{L_2}{L_\odot} = \frac{R_2^{\,2} \cdot T_2^{\,4}}{R_\odot^2 \cdot T_\odot^{\,4}} = \frac{(3{,}9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2 \cdot (3500\,\mathrm{K})^4}{(6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m})^2 \cdot (5800\mathrm{K})^4} = 94 \cdot 10^3$$

c) Die Masse-Leuchtkraftbeziehung gilt nur für Hauptreihensterne und nicht für Rote Riesen.

Aufgabe zu Neutronensternen

a) Welche Dichte hat ein Proton mit der Masse $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg und dem Radius $1{,}4 \cdot 10^{-15}$ m ?
b) Welchen Radius hätte die Sonne, wenn man sie auf die Dichte eines Neutronensterns mit ca. 10^8 t/cm^3 komprimieren könnte?
c) Eine rotierende Kugel der Masse M soll pro Sekunde 100 Umdrehungen ausführen. Welche Dichte muss die Kugel mindestens aufweisen, damit sie durch die Gravitationskraft zusammengehalten werden kann?

Lösung:

a) Dichte $\rho_{\mathrm{Proton}} = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = \dfrac{1{,}7 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3} \cdot (1{,}4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m})^3 \cdot \pi} = 1{,}5 \cdot 10^{17}\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1{,}5 \cdot 10^{14}\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$

b) $m_\odot = 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ und $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi} = 10^8\,\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{cm}^3} = 10^{14}\,\dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \ \Rightarrow\ \dfrac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \dfrac{m}{\rho} \ \Rightarrow$

$$r_\odot = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot m_\odot}{4\pi \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{4\pi \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}/\mathrm{cm}^3}} = 1{,}68... \cdot 10^6\,\mathrm{cm} \approx 17\,\mathrm{km}$$

c) Für ein Massestück an der Oberfläche muss die Gravitationsanziehung größer sein als die benötigte Zentripetalkraft.

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r < G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \ \Rightarrow\ \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 < \frac{G \cdot M}{r^3} = \frac{G \cdot M \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi}{\frac{4}{3} r^3 \pi} = G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \ \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 < G \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \rho \ \Rightarrow\ \rho > \frac{4\pi^2 \cdot 3}{T^2 \cdot 4 \cdot G \cdot \pi} = \frac{\pi \cdot 3}{T^2 \cdot G} = \frac{\pi \cdot 3}{(0{,}01\mathrm{s})^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}} = 1{,}4 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Aufgabe Stellare Schwarze Löcher

Der Schwarzschildradius $R_S = \dfrac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ gibt an, innerhalb welchen Abstands ein Photon eine Masse M nicht mehr verlassen kann. Bestimmen Sie für die Masse unserer Sonne den Schwarzschildradius!

Lösung: $R_{S,\odot} = \dfrac{2 \cdot G \cdot M_\odot}{c^2} = \dfrac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}{(3{,}0 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s})^2} = 3{,}0 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 3{,}0\,\mathrm{km}$