Q12 * Mathe m6 * 1. Klausur am 18.11.2013

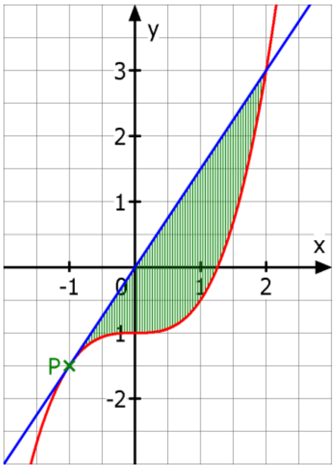
1. Lösen Sie die Aufgabe auf dem Arbeitsblatt!

2. Das Bild zeigt den Graphen der

   Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^3 - 1$.

   Die Tangente im Punkt P(-1 / ?) an den Graphen von f schließt mit diesem die schraffierte Fläche ein.

   Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche!

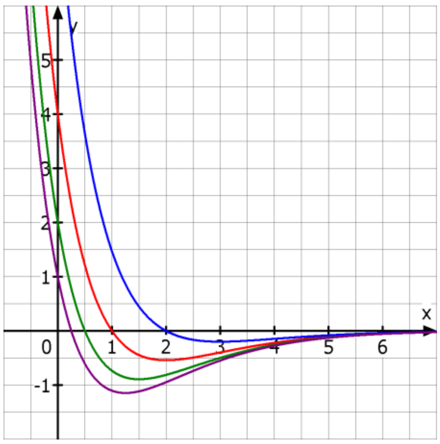


3. Prüfen Sie, ob es ein $k > 0$ mit folgender

   Eigenschaft gibt. $\int_{-k}^{k} x + k \, dx = k$

4. Das Bild zeigt einige Graphen der Funktionenschar

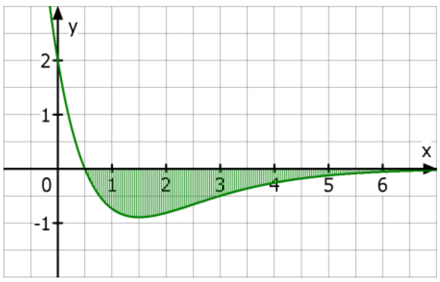
   $f_k(x) = 4 \cdot (k - x) \cdot e^{-x}$ mit $k > 0$.



   a) Zeigen Sie, dass jede Kurve der Schar genau eine Nullstelle, genau einen Tiefpunkt und genau einen Wendepunkt besitzt.

   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunktes in Abhängigkeit von k.
      [Ergebnis: $TIP(k+1 / -4 \cdot e^{-1-k})$]
      Auf welcher Kurve liegen alle Tiefpunkte der Schar? Bestimmen Sie den Funktionsterm t(x) dieser Kurve und geben Sie auch den zugehörigen Definitionsbereich an.

   c) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = 4 \cdot (x + 1 - k) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f_k(x)$ ist.



   d) Der grüne Graph und die positive x-Achse schließen eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche ein. Bestimmen Sie den endlichen Inhalt dieser Fläche.
      [$\lim_{x \to \infty} x \cdot e^{-x} = 0$ darf verwendet werden!]

Aufgabe	1	2	3	4a	b	c	d	Summe
Punkte	4	6	4	7	4	2	4	31

Gutes Gelingen!

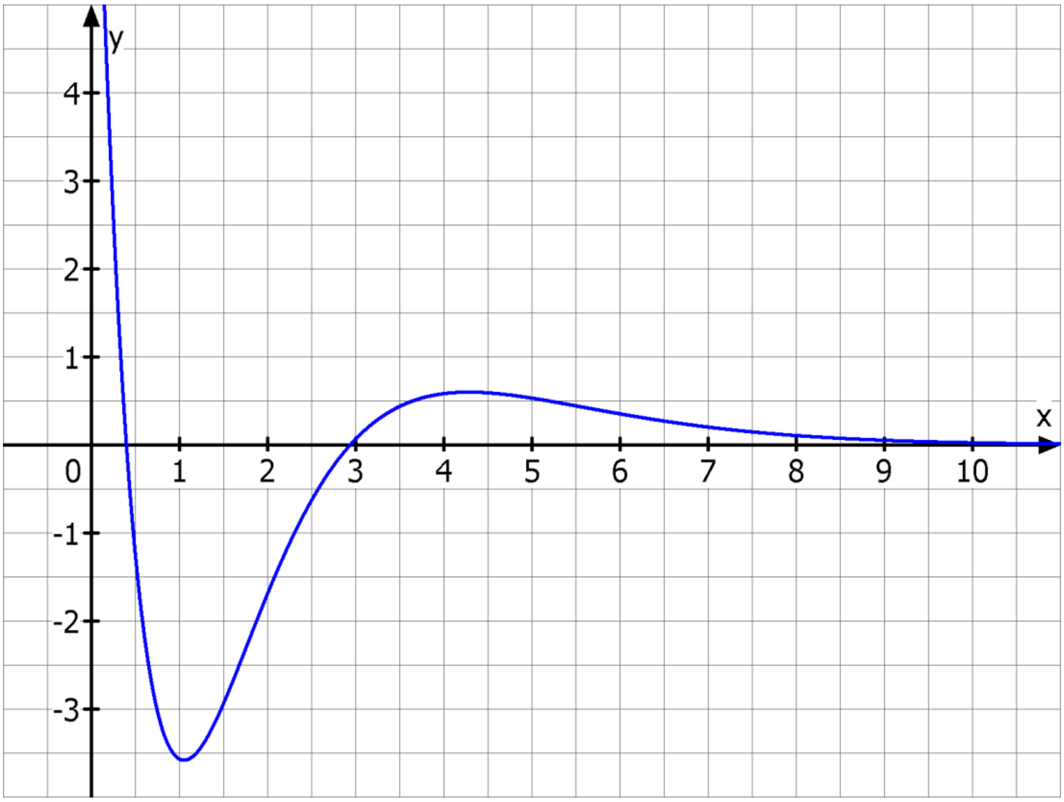
Q12 * Mathe m6 * Arbeitsblatt zur 1. Klausur am 18.11.2013

Name: ....

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

   Tragen Sie in das Bild möglichst genau den Graphen der Integralfunktion

   $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ ein!



Q12 * Mathe m6 * 1. Klausur am 18.11.2013 * Lösung

2. $f(x) = 0{,}5x^3 - 1$ und $f'(x) = 1{,}5x^2$ und $f(-1) = -0{,}5 - 1 = -1{,}5$ also $P(-1/-1{,}5)$

   Tangente im Punkt P :

   $y = mx + t$ mit $m = f'(-1) = 1{,}5$ und $-1{,}5 = 1{,}5\cdot(-1) + t \Rightarrow t = 0$

   Also Tangente: $y = 1{,}5x$

   Zweiter Schnittpunkt S offensichtlich bei $x_S = 2$.

   Probe: $y_S = 1{,}5\cdot 2 = 3$ und $f(2) = 0{,}5\cdot 8 - 1 = 3 = y_S$

   $$A = \int_{-1}^{2} 1{,}5x - f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} 1{,}5x - 0{,}5x^3 + 1\,dx = \left[\,0{,}75x^2 - 0{,}125\cdot x^4 + x\,\right]_{-1}^{+2} =$$

   $$(3 - 2 + 2) - (0{,}75 - 0{,}125 - 1) = 3 + 0{,}375 = 3{,}375$$

3. $$\int_{-k}^{k} x + k\,dx = k \Leftrightarrow \left[\,0{,}5x^2 + kx\,\right]_{-k}^{+k} = k \Leftrightarrow (0{,}5k^2 + k^2) - (0{,}5k^2 - k^2) = k \Leftrightarrow$$

   $$k^2 + k^2 = k \Leftrightarrow 2k^2 - k = 0 \Leftrightarrow k\cdot(2k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 0{,}5 \quad (k > 0)$$

4. a) NSt.: $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot(k - x)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x_1 = k$

   $f_k'(x) = 4\cdot\left[-1\cdot e^{-x} + (k-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)\right] = 4\cdot(x - 1 - k)\cdot e^{-x}$

   $f_k''(x) = 4\cdot\left[+1\cdot e^{-x} + (x-1-k)\cdot e^{-x}\cdot(-1)\right] = 4\cdot(2 + k - x)\cdot e^{-x}$

   hor.Tg.: $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 - k = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1 + k$

   $f_k'(x)$ ändert bei x_2 das Vorzeichen von $-$ auf $+$, d.h. bei x_2 liegt ein TIP.

   Flachpunkt: $f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + k - x = 0 \Leftrightarrow x_3 = 2 + k$

   $f_k''(x)$ ändert bei x_3 das Vorzeichen von $+$ auf $-$, d.h. bei x_3 liegt ein Wendepunkt.

   b) $f_k(1+k) = 4\cdot(k - (1+k))\cdot e^{-(1+k)} = -4\cdot e^{-(1+k)}$ also $TIP(1+k\,/ -4\cdot e^{-1-k})$

   $x_2 = 1 + k$ und $y_2 = -4\cdot e^{-(1+k)} = -4\cdot e^{-x_2}$ also $t(x) = -4\cdot e^{-x}$

   Wegen $k > 0$ gilt $x_2 = 1 + k > 1$ und daher $D_t =]\,1\,;\,\infty[$

   c) $F_k(x) = 4\cdot(x + 1 - k)\cdot e^{-x} \Rightarrow$

   $F_k'(x) = 4\cdot 1\cdot e^{-x} + 4\cdot(x + 1 - k)\cdot e^{-x}\cdot(-1) = 4\cdot(k - x)\cdot e^{-x} = f_k(x)$

   Also ist $F_k(x) = 4\cdot(x + 1 - k)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von $f_k(x)$.

   d) Zum grünen Graphen gehört $k = 0{,}5$ (siehe NSt. oder $f_{0,5}(0) = 4\cdot(0{,}5)\cdot e^0 = 2$)

   $$\lim_{a\to\infty}\int_{0,5}^{a} f_{0,5}(x)\,dx = \lim_{a\to\infty}\left[\,4\cdot(x + 1 - 0{,}5)\cdot e^{-x}\,\right]_{0,5}^{a} =$$

   $$\lim_{a\to\infty} 4\cdot(a + 0{,}5)\cdot e^{-a} - 4\cdot(0{,}5 + 0{,}5)\cdot e^{-0,5} = \lim_{a\to\infty} 4ae^{-a} + \lim_{a\to\infty} 2e^{-a} - 4e^{-0,5} = 0 + 0 - 4e^{-0,5}$$

   Also $A = \left|-4e^{-0,5}\right| = 4e^{-0,5} = \dfrac{4}{\sqrt{e}} \approx 2{,}43$

Q12 * Mathe m6 * Arbeitsblatt zur 1. Klausur am 18.11.2013 * Lösung

1. Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f .

   Tragen Sie in das Bild möglichst genau den Graphen der Integralfunktion

   $F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$ ein!